Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

Übungen zur Vorlesung Wirtschaftsstatistik
Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 3.1

a) Bei einer Befragung stellt sich heraus, dass
   - 20% aller Befragten Nichtraucher sind
   - 60% aller Befragten Raucher und Kaffeetrinker sind
   - 90% der Kaffeetrinker rauchen

   1. Stellen Sie die oben beschriebenen Sachverhalte durch Wahrscheinlichkeiten dar.
   2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter den Rauchern einen Kaffeetrinker zu finden?
   3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl einer Person keinen Kaffeetrinker zu finden?

b) Nehmen Sie an, dass der Anteil der Raucher 80% und der Anteil der Kaffeetrinker $66{,}\overline{6}\%$ betragen und dass die Ereignisse „Rauchen“ und „Kaffeetrinken“ stochastisch unabhängig sind. Wie groß ist unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, bei zufälliger Auswahl einer Person einen nichtrauchenden Kaffeetrinker zu finden?

Aufgabe 3.2 (Süddeutsche Zeitung vom 22.04.2008, Seite 18)
In der BRD sind 700 000 Menschen an Alzheimer erkrankt. Der neue Bluttest NuroPro einer Firma in Texas deckte in einem Probelauf mit 200 Probanden 64% aller Alzheimer-Kranken auf und schloss bei ebenfalls 64% aller Gesunden eine Alzheimererkrankung aus.

Wie viel Prozent der Patienten, bei denen aufgrund des Bluttest eine Alzheimer-Erkrankung diagnostiziert wurde, sind tatsächlich an Alzheimer erkrankt?

Aufgabe 3.3
In einem Unternehmen werden Werkstücke auf zwei Maschinen hergestellt.
Maschine 1 mit einem Anteil von 40% an der Gesamtproduktion arbeitet mit einer Ausschussquote von 6%.
Maschine 2 liefert den Rest der Gesamtproduktion; ihre Ausschussquote beträgt 3%.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) ... ein zufällig aus der Gesamtproduktion herausgegriffenes Werkstück der Norm entspricht, d. h. ein Qualitätsstück ist?

b) ... ein Ausschussstück auf Maschine 2 gefertigt wurde?

c) ... ein Werkstück, das auf Maschine 1 gefertigt wurde, der Norm entspricht?

Aufgabe 3.4
Ein Unternehmen fertigt seine Güter (Elektrogeräte) neben den üblichen Wochentagen Montag bis Freitag auch am Wochenende (Samstag, Sonntag). Am Wochenende liegt die Ausschussrate bei jeweils 7%, montags liegt die Ausschussrate bei 10%, an den restlichen Wochentagen bei jeweils 5%. Am Samstag und am Sonntag werden jeweils 10% aller Güter gefertigt, die restlichen 80% der Produktion verteilen sich gleichmäßig über die übrigen Wochentage (16% pro Tag).

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten Gerät um Ausschuss handelt.
2. Ein Produktionsstück ist Ausschuss. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es an einem Montag hergestellt wurde?

Aufgabe 3.5
Bei einer Umfrage des Instituts für Demoskopie in Allensbach über Gesundheitsfragen zeigten sich folgende Ergebnisse über Probleme mit dem Einschlafen:

a)
- 77% aller Befragten gaben an, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 38% aller Befragten waren Männer, die angaben, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 13% aller Befragten waren Frauen, die angaben, nur schwer einschlafen zu können.

Füllen Sie bitte die folgende Tabelle mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus.

Wie gut können Sie einschlafen?	Männer	Frauen	Zusammen
Leicht oder ziemlich gut			
Nur schwer			
Zusammen			

b)
- 77% aller Befragten gaben an, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 38% aller Befragten waren Männer, die angaben, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 56,5217% der Befragten, die nur schwer einschlafen können, waren Frauen.

Füllen Sie bitte die folgende Tabelle mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus.

Wie gut können Sie einschlafen?	Männer	Frauen	Zusammen
Leicht oder ziemlich gut			
Nur schwer			
Zusammen			

c)
- 77% aller Befragten gaben an, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 38% aller Befragten waren Männer, die angaben, leicht oder ziemlich gut einschlafen zu können;
- 25% aller befragten Frauen gaben an, nur schwer einschlafen zu können.

Füllen Sie bitte die folgende Tabelle mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus.

Wie gut können Sie einschlafen?	Männer	Frauen	Zusammen
Leicht oder ziemlich gut			
Nur schwer			
Zusammen			

Aufgabe 3.6
In meinem Projekt wurde ein schönes Applet über bedingte Wahrscheinlichkeiten erstellt. Gehen Sie dazu wie folgt ins Internet:

1. *web.neuestatistik.de/inhalte_web/content/start.html*
2. Klicken auf *Medien Galerie*
3. Klicken Sie auf *Wahrscheinlichkeitsrechnung*
4. Klicken auf *Java-Applet Venn-Diagramm II*

Hier finden Sie zwei Mengen. Untersuchen Sie, wie sich $P(A \mid B)$ verändert, wenn die Menge A (entsprechend markierte Fläche) mit dem Cursor verschoben wird.

Aufgabe 3.7
Melden Sie sich im Netz an der Texas A&M University beim Associate Professor Dr. R. Webster West an. Dort bearbeiten wir seine interaktive Aufgabe zu bedingten Wahrscheinlichkeiten:

http://www.stat.tamu.edu/~west/applets/Venn.html

Lösung von Aufgabe 3.1
R = Raucher
K = Kaffeetrinker

a) 1. $0{,}20 = P(\overline{R})$
$0{,}60 = P(R \cap K)$
$0{,}90 = P(R \mid K)$

2.

	R	$\overline{R}$	
K	3/5	1/15	2/3
$\overline{K}$	1/5	2/15	1/3
	4/5	1/5	1

bzw.

	R	$\overline{R}$	
K	0,6	0,07	0,67
$\overline{K}$	0,2	0,13	0,33
	0,8	0,2	1

$P(K \mid R) = 0{,}75$

3. $P(\overline{K}) = \frac{1}{3}$

b)

	R	$\overline{R}$	
K	8/15	2/15	2/3
$\overline{K}$	4/15	1/15	1/3
	4/5	1/5	1

$P(\overline{R} \cap K) = \frac{2}{15}$

Lösung von Aufgabe 3.2
A = Alzheimer
T = Bluttest ist positiv
Gegeben sind die folgenden Anteile:
$P(A) = \frac{700\,000}{82\,000\,000} = 0{,}0085$
$P(T \mid A) = 0{,}64$
$P(\overline{T} \mid \overline{A}) = 0{,}64$
Daraus lassen sich die folgenden Anteile berechnen:
$P(A \cap T) = 0{,}64 \cdot 0{,}0085 = 0{,}0055$
$P(\overline{A} \cap \overline{T}) = 0{,}64 \cdot 0{,}9915 = 0{,}6345$
Jetzt können wir die Arbeitstabelle aufstellen:

	A	$\overline{A}$	
T	0,0055	0,3570	0,3625
$\overline{T}$	0,0030	0,6345	0,6375
	0,0085	0,9915	1

Gesucht wird: $P(A \mid T) =?$
$$P(A \mid T) = \frac{0{,}0055}{0{,}3625} = 0{,}015$$
d.h. lediglich 1,5% der Patienten, bei denen der Bluttest eine Alzheimererkrankung diagnostiziert, haben tatsächlich Alzheimer.

Lösung von Aufgabe 3.3
B = Stück wird auf Maschine M_1 hergestellt
$\overline{B}$ = Stück wird auf Maschine M_2 hergestellt

A = Stück ist Ausschuss
Gegeben sind die Wahrscheinlichkeiten:
$P(B) = 0{,}40$ und $P(A \mid B) = 0{,}06$ und $P(A \mid \overline{B}) = 0{,}03$

a) $P(\overline{A}) = 0{,}958$

b) $P(\overline{B} \mid A) = \frac{0{,}018}{0{,}042} = 0{,}4286$

c) $P(\overline{A} \mid B) = \frac{0{,}376}{0{,}4} = 0{,}94$

Lösung von Aufgabe 3.4
B_1 = Produktionsstück wird am Montag gefertigt
$\vdots$
B_7 = Produktionsstück wird am Sonntag gefertigt
A = Produktionsstück ist Ausschuss
$P(A \mid B_1) = 0{,}10 \Rightarrow P(A \cap B_1) = 0{,}16 \cdot 0{,}10 = 0{,}016$
$P(A \mid B_2) = 0{,}05 \Rightarrow P(A \cap B_2) = 0{,}16 \cdot 0{,}05 = 0{,}008$

Arbeitstabelle:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	$\sum$
A	0,016	0,008	0,008	0,008	0,008	0,007	0,007	?
$\overline{A}$								
	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,10	0,10	1

a) $P(A) = 0{,}062$

b) $P(B_1 \mid A) = \dfrac{0{,}016}{0{,}062} = 0{,}2581$

Lösung zu Aufgabe 3.5
Sowohl für a), b) und c) lautet die Arbeitstabelle:

Wie gut können Sie einschlafen?	Männer	Frauen	Zusammen
Leicht oder ziemlich gut	0,38	0,39	0,77
Nur schwer	0,10	0,13	0,23
Zusammen	0,48	0,52	1