Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III

Chi-Quadrat-Anpassungstest

Aufgabe 17.1

Wir möchten überprüfen, ob der nachfolgende Datensatz $y_1, y_2, \ldots, y_{250}$ aus einer Normalverteilung stammt. Zunächst standardisieren wir die Werte, d.h. wir berechnen das arithmetische Mittel $\overline{y}$ und die Standardabweichung s_y und transformieren den ursprünglichen Datensatz wie folgt:

$$x_i = \frac{y_i - \overline{y}}{s_y}$$

Die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_{250}$ klassieren wir wie folgt:

$x^*_{j-1} < x \leq x^*_j$	n_j
$-3 < x \leq -2$	8
$-2 < x \leq -1$	31
$-1 < x \leq 0$	89
$0 < x \leq 1$	90
$1 < x \leq 2$	26
$2 < x \leq 3$	6
$\sum$	$n = 250$

Überprüfen Sie mit dem Chi-Quadrat-Anpassungstest zum Niveau $\alpha = 0{,}05$, ob der standardisierte Datensatz $x_1, x_2, \ldots, x_{250}$ aus einer Normalverteilung $\mathsf{N}(0;1)$ stammt.

Lösung zu Aufgabe 17.1

H_0: „Der standardisierte Datensatz stammt aus der Normalverteilung $\mathsf{N}(0;1)$“ gegen H_1: „nicht H_0“

Wir berechnen zunächst die Normalverteilungs-Wahrscheinlichkeiten p_j der $I = 6$ Klassen:

$p_1 = F_U(-2) - F_U(-3) = 0{,}023 - 0{,}001 = 0{,}022$

$p_2 = F_U(-1) - F_U(-2) = 0{,}159 - 0{,}023 = 0{,}136$

$p_3 = F_U(0) - F_U(-1) = 0{,}5 - 0{,}159 = 0{,}341$

Aus Symmetrie-Gründen gilt für die NV: $p_1 = p_6, p_2 = p_5, p_3 = p_4$. Somit ergibt sich die folgende Arbeitstabelle:

$x^*_{j-1} < x \leq x^*_j$	n_j	p_j	$n \cdot p_j$
$-3 < x \leq -2$	8	0,022	5,5
$-2 < x \leq -1$	31	0,136	34
$-1 < x \leq 0$	89	0,341	85,25
$0 < x \leq 1$	90	0,341	85,25
$1 < x \leq 2$	26	0,136	34
$2 < x \leq 3$	6	0,022	5,5
$\sum$	$n = 250$	≈ 1	250

Da alle unter H_0 erwarteten absoluten Häufigkeiten $n \cdot p_j$ größer gleich fünf sind, ist die Faustregel des Chi-Quadrat-Anpassungstests erfüllt.

Es ergibt sich folgender Wert der empirischen Teststatistik:

$$\frac{(8-5{,}5)^2}{5{,}5} + \frac{(31-34)^2}{34} + \frac{(89-85{,}25)^2}{85{,}25} + \frac{(90-85{,}25)^2}{85{,}25} + \frac{(26-34)^2}{34} + \frac{(6-5{,}5)^2}{5{,}5} =$$

$$1{,}13636364 + 0{,}26470588 + 0{,}16495601 + 0{,}26466276 + 1{,}88235294 + 0{,}04545455 = 3{,}758496$$

Der Freiheitsgrad der Chi-Quadrat-Verteilung beträgt $df = I - 1 = 6 - 1 = 5$. Der obere 5%-Punkt der Chi-Quadrat-Verteilung mit fünf Freiheitsgraden beträgt 11,070.

(*Hinweis: Leider wurde im Buch in der Tabelle auf Seite 295 nur dieser Wert falsch gerundet, sodass der Wert gemäß dieser Tabelle 11,071 beträgt. Sorry! Ich werde diesen Fehler in der nächsten Auflage korrigieren.*)

Da gilt: $3{,}758496 < 11{,}070$, wird die Nullhypothese nicht abgelehnt; d.h. der standardisierte Datensatz stammt aus der Normalverteilung $\mathsf{N}(0;1)$.

Der sortierte standardisierte Datensatz lautet wie folgt:

−2.511893933	−2.488170111	−2.460524009	−2.365268908	−2.284130946
−2.222593137	−2.131613722	−2.041842841	−1.908615391	−1.900150597
−1.873983058	−1.811123100	−1.803865735	−1.737075280	−1.683882999
−1.620904742	−1.609392886	−1.577635059	−1.532179945	−1.529012007
−1.513325951	−1.491562691	−1.461627114	−1.452164366	−1.442991564
−1.435975378	−1.429240336	−1.421500850	−1.398754823	−1.371594583
−1.338013657	−1.333678983	−1.324827848	−1.300899585	−1.235372293
−1.212945867	−1.142357086	−1.135192383	−1.122033175	−0.973012826
−0.945822079	−0.942355469	−0.917408777	−0.908796958	−0.902587512
−0.899090470	−0.788570418	−0.768013741	−0.765212027	−0.765145201
−0.763202858	−0.747429776	−0.705322466	−0.683821175	−0.682540214
−0.680417812	−0.679967524	−0.668135118	−0.667716721	−0.667538717
−0.650964183	−0.648539067	−0.645019329	−0.632260083	−0.627535897
−0.607642382	−0.605891482	−0.567431836	−0.548462408	−0.545750740
−0.544864187	−0.541246617	−0.504292732	−0.503406657	−0.484430635
−0.477417617	−0.456595967	−0.428572974	−0.426801356	−0.418457590
−0.407839414	−0.397079204	−0.367638285	−0.355310498	−0.350398950
−0.343001807	−0.340814405	−0.336364169	−0.326042660	−0.325658595
−0.309869878	−0.308157521	−0.307332808	−0.306001947	−0.286225991
−0.285147992	−0.274290306	−0.271007380	−0.270388232	−0.245611450
−0.242031934	−0.236910675	−0.216235923	−0.196623444	−0.186454174
−0.176993129	−0.173084324	−0.173033250	−0.166561340	−0.164942343
−0.163871247	−0.160000548	−0.157228547	−0.143412551	−0.140261909
−0.133758893	−0.104828187	−0.088991508	−0.088021695	−0.084510660
−0.077806946	−0.073809116	−0.063990098	−0.042461863	−0.031161616
−0.028325958	−0.019150434	−0.003241333	0.014679833	0.023859723
0.053889160	0.057496872	0.075105773	0.091305188	0.099597580
0.108509257	0.109229625	0.112318304	0.117414060	0.119541098
0.127924075	0.169572885	0.169832380	0.170638590	0.171033380
0.174367888	0.181187839	0.190214610	0.192815486	0.203102465
0.213262404	0.218693980	0.229975439	0.257006591	0.271441726
0.272195449	0.276612681	0.287421342	0.295049643	0.304455791
0.324928313	0.325304472	0.336697332	0.348303978	0.350965378
0.354386796	0.355071079	0.357750033	0.379028096	0.379762347
0.401897316	0.406586661	0.463532078	0.466788255	0.469150079
0.485753993	0.509357964	0.529882213	0.535531895	0.565252381
0.567671695	0.574131607	0.580092683	0.593222652	0.606554173
0.614739649	0.650003716	0.683488722	0.697179382	0.700719326
0.721302112	0.724188211	0.726967144	0.730297296	0.733222624
0.752499673	0.752994714	0.756640188	0.789153366	0.811962841
0.820106683	0.829098330	0.833675288	0.843424192	0.849668068
0.857642467	0.866334529	0.879221146	0.880852910	0.908630257
0.927555112	0.938069747	0.949139685	0.953204480	0.959029016

0.963405838	0.980236878	0.982890327	1.029983616	1.094581526
1.128140450	1.144325606	1.151177633	1.185653206	1.193295947
1.219686535	1.223057672	1.229303595	1.241577930	1.261305908
1.281923429	1.297212004	1.332858343	1.334515821	1.342473962
1.350370299	1.4025452396	1.439592253	1.513909570	1.664960984
1.692338346	1.858200198	1.873225876	1.875953813	2.031091798
2.196402934	2.214682077	2.596641972	2.622791810	2.786857039