Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III

t-Test

Aufgabe 15.1

Haben heutzutage Paare weniger Kinder als es in ihren Ursprungsfamilien gab? Um diese Frage zu beantworten, wurden 31 Personen befragt. Es ergaben sich folgende Werte:

Nr.	Anzahl		Nr.	Anzahl	
	Geschwister	Kinder		Geschwister	Kinder
1	1	2	16	6	2
2	2	1	17	4	1
3	2	1	18	6	2
4	2	0	19	12	2
5	4	0	20	5	1
6	7	5	21	2	1
7	7	3	22	7	0
8	7	4	23	4	0
9	7	3	24	7	3
10	1	2	25	6	1
11	6	0	26	7	0
12	2	5	27	4	3
13	1	0	28	5	0
14	2	1	29	1	2
15	7	1	30	1	2
			31	7	1

a) Prüfen Sie mit einem Test, ob sich die Kinderanzahlen von heute und früher signifikant unterscheiden.

b) Falls Sie unter a) einen signifikanten Unterschied aufgedeckt haben, so prüfen Sie mit einem einseitigen Test, ob Paare heutzutage signifikant weniger Kinder im Vergleich zu ihren Ursprungsfamilien haben.

c) Wie viele Kinder gibt es heutzutage signifikant weniger?

Lösung zu Aufgabe 15.1
X=Differenz Anzahl Geschwister minus Anzahl Kinder
$E[X] = \mu$

Nr.	Differenz	Differenz^2
1	-1	1
2	1	1
3	1	1
4	2	4
5	4	16
6	2	4
7	4	16
8	3	9
9	4	16
10	-1	1
11	6	36
12	-3	9
13	1	1
14	1	1
15	6	36
16	4	16
17	3	9
18	4	16
19	10	100
20	4	16
21	1	1
22	7	49
23	4	16
24	4	16
25	5	25
26	7	49
27	1	1
28	5	25
29	-1	1
30	-1	1
31	6	36
$\sum$	93	529

$\overline{x} = \dfrac{93}{31} = 3$

$s_x^2 = \dfrac{529}{31} - 3^2 = 8{,}0645$ und $s_x = \sqrt{8{,}0645} = 2{,}8398$

Faustregel $n = 31 \geq 30$ für t-Test ist erfüllt.

a) zweiseitiger t-Test:
H_0: Es gibt im Vergleich zu früher keinen Unterschied in der mittleren Kinderanzahl eines Paares; d.h. $\mu_0 = 0$

H_1: Die mittlere Kinderanzahl eines Paares von heute im Vergleich zu früher hat sich verändert; d.h. $\mu_0 \neq 0$

p-Wert t-Test $\approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{3-0}{\frac{2{,}8398}{\sqrt{31}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-5{,}881855) \approx 2 \cdot 0 \approx 0 \leq 0{,}05 = \alpha$

d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. die mittlere Kinderanzahl gegenüber früher hat sich signifikant verändert.

b) einseitiger t-Test:

arithmetische Mittel

Geschwister	Kinder
$\frac{142}{31} = 4{,}58$	$\frac{49}{31} = 1{,}58$

Da es in der Stichprobe früher mehr Kinder gab als heute, lautet das Testproblem:

H_0: Nicht H_1; d.h. $\mu_0 \leq 0$

H_1: Paare hatten früher im Mittel mehr Kinder als heute; d.h. $\mu_0 > 0$

p-Wert einseitiger t-Test $\approx 0{,}5 \cdot 0 = 0 \leq 0{,}05 = \alpha$

d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. Paare hatten früher im Mittel signifikant mehr Kinder als heute. Oder anders ausgedrückt: Heute hat ein Paar im Mittel signifikant weniger Kinder als früher.

c)
1. Unterschied= 1 Kind

   Zweiseitiger t-Test: $H_0 : \mu_0 = 1$ gegen $H_1 : \mu_0 \neq 1$

   p-Wert t-Test $\approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{3-1}{\frac{2{,}8398}{\sqrt{31}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-3{,}9211237) \approx 2 \cdot 0 \approx 0 \leq 0{,}05 = \alpha$

   d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. der Unterschied zwischen der mittleren Kinderanzahl von heute und früher beträgt signifikant nicht ein Kind.

   Einseitiges Testproblem mit Unterschied von einem Kind:

   H_0: Nicht H_1; d.h. $\mu_0 \leq 1$

   H_1: Paare hatten früher im Mittel mehr als ein Kind mehr als heutzutage; d.h. $\mu_0 > 1$

   p-Wert t-Test $\approx 0{,}5 \cdot 0 \approx 0 \leq 0{,}05 = \alpha$

   d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. Paare hatten früher im Mittel signifikant mehr als ein Kind mehr als heutzutage.

2. Unterschied = 2 Kinder

   Zweiseitiger t-Test: $H_0 : \mu_0 = 2$ gegen $H_1 : \mu_0 \neq 2$

   p-Wert t-Test $\approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{3-2}{\frac{2{,}8398}{\sqrt{31}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-1{,}960618) \approx 2 \cdot 0{,}025 = 0{,}05 \leq 0{,}05 = \alpha$

   d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. der Unterschied zwischen der mittleren Kinderanzahl von heute und früher beträgt signifikant nicht zwei Kinder.

   Einseitiges Testproblem mit Unterschied von zwei Kindern:

   H_0: Nicht H_1; d.h. $\mu_0 \leq 2$

   H_1: Paare hatten früher im Mittel mehr als ein Kind mehr als heutzutage;

d.h. $\mu_0 > 2$
p-Wert t-Test $\approx 0{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}025 \leq 0{,}05 = \alpha$
d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. Paare hatten früher im Mittel signifikant mehr als zwei Kinder mehr als heutzutage.

3. Unterschied $= 3$ Kinder
   Zweiseitiger t-Test: $H_0 : \mu_0 = 3$ gegen $H_1 : \mu_0 \neq 3$
   p-Wert t-Test $\approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{3-3}{\frac{2{,}8398}{\sqrt{31}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(0) = 2 \cdot 0{,}5 = 1 > 0{,}05 = \alpha$
   d.h. H_0 wird nicht abgelehnt; d.h. dass der Unterschied beträgt drei Kinder beträgt, kann nicht verworfen werden.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III

t-Test Arbeitsblatt

Aufgabe

Testen Sie zum Signifikanzniveau 0,05, ob im Mittel die Nachbereitungszeiten (gemessen in Stunden pro Woche) für die Mathematik-Vorlesungen und für die Statistik-Vorlesungen gleich groß sind. Ein Umfrage unter 34 Studierenden ergab folgende Daten:

Nr.	Nachbereitungszeit (in h)		Nr.	Nachbereitungszeit (in h)	
	Mathematik	Statistik		Mathematik	Statistitik
1	2,2	4,7	18	5,0	5,7
2	6,9	6,4	19	4,1	7,7
3	2,7	5,7	20	1,1	5,4
4	7,5	6,1	21	5,5	5,3
5	7,1	2,5	22	2,6	6,1
6	4,5	6,5	23	3,9	5,0
7	5,3	3,8	24	6,6	4,1
8	6,6	5,7	25	7,0	5,4
9	4,7	3,0	26	7,1	5,3
10	3,8	6,4	27	0,7	3,9
11	5,9	5,7	28	6,7	6,4
12	2,6	6,9	29	3,0	4,2
13	4,5	3,7	30	1,7	6,2
14	2,6	3,3	31	5,2	4,2
15	1,8	3,1	32	5,6	7,3
16	5,7	0,9	33	5,4	5,4
17	6,6	1,9	34	4,6	3,6

Wie lautet die Testentscheidung aufgrund dieser Stichprobe vom Umfang 34?

Lösung:
X=Nachbereitungzeit Mathematik minus Nachbereitungszeit Statistik (in Stunden)
$H_0 : E[X] = 0$ gegen $H_1 : E[X] \neq 0$
Die Faustregel $n \geq 30$ ist erfüllt.
Zunächst bilden wir die Differenz x_i der Nachbereitungszeit in Mathematik minus der Nachbereitungszeit in Statistik:

i	x_i	x_i^2
1	−2,5	6,25
2	0,5	
3	−3,0	
4	1,4	
5	4,6	
6	−2,0	
7	1,5	
8	0,9	
9	1,7	
10	−2,6	
11	0,2	
12	−4,3	
13	0,8	
14	−0,7	
15	−1,3	
16	4,8	
17	4,7	
18	−0,7	
19	−3,6	
20	−4,3	
21	0,2	
22	−3,5	
23	−1,1	
24	2,5	
25	1,6	
26	1,8	
27	−3,2	
28	0,3	
29	−1,2	
30	−4,5	
31	1,0	
32	−1,7	
33	0,0	
34	1,0	
$\sum$	−10,7	216,21

$$\overline{x} = \frac{-10{,}7}{34} = -0{,}3147059$$

$s^2 = \frac{216{,}21}{34} - (-0{,}3147059)^2 = 6{,}260078$

$s = \sqrt{6{,}260078} = 2{,}502015$

p-Wert $\approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{-0{,}3147059 - 0}{\frac{2{,}502015}{\sqrt{34}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-0{,}7334) \approx 2 \cdot 0{,}232 = 0{,}464 >$ $0{,}05 = \alpha$

d.h. H_0 wird nicht abgelehnt; d.h. es gibt keine signifikanten Unterschiede in der mittleren Vorbereitungszeit für Statistik und Mathematik.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III

t-Test Arbeitsblatt

Aufgabe

Testen Sie zum Signifikanzniveau 0,05, ob die wöchentliche Nachbereitungszeit in Statistik im Mittel 5 1/2 Stunden beträgt, anhand der folgenden Stichprobe:

Stud. Nr.	Nachbereitungs-zeit (in h) Statistik	Stud. Nr.	Nachbereitungs-zeit (in h) Statistitik
1	4,7	16	5,7
2	6,4	17	7,7
3	5,7	18	5,4
4	6,1	19	5,3
5	2,5	20	6,1
6	6,5	21	5,0
7	3,8	22	4,1
8	5,7	23	5,4
9	3,0	24	5,3
10	6,4	25	3,9
11	5,7	26	6,4
12	6,9	27	4,2
13	3,7	28	6,2
14	3,3	29	0,9
15	3,1	30	1,9

Lösung
X=Nachbereitungzeit Statistik (in Stunden)
$H_0 : E[X] = 5{,}5$ gegen $H_1 : E[X] \neq 5{,}5$
Die Faustregel $n \geq 30$ ist erfüllt.
$\overline{x} = 4{,}9$
$s^2 = \dfrac{794{,}4}{30} - 4{,}9^2 = 2{,}47$
$s = 1{,}571623$
p-Wert $\approx 2 \cdot F_U\left(-\left|\dfrac{4{,}9-5{,}5}{\frac{1{,}571623}{\sqrt{30}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-2{,}091046) \approx 2 \cdot 0{,}018 = 0{,}036 \leq 0{,}05 = \alpha$
d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. die mittlere Nachbereitungszeit für Statistik beträgt nicht 5,5 Stunden pro Woche.