Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

Übungen zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik

Verknüpfungen und ökonomische Funktionen

Aufgabe 4.1
Drücken Sie die nachfolgenden Funktionen $h(x)$ als die Verknüpfung $f \circ g$ zweier Funktionen von g und f aus.

a) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$
$h(x) = (7x - 5)^4$

b) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$h(x) = e^{7x-5}$

c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$h(x) = 7x^4 - 5$

Aufgabe 4.2
In einem Unternehmen lautet die Funktion der variablen Stückkosten $k_v(x)$ eines Gutes:

$$k_v(x) = \frac{1}{100}x^2 + \frac{15}{100}x + 10$$

wobei x die produzierte Menge des Gutes bezeichnet.
Die gesamten Fixkosten betragen 200 GE. Die Preis-Absatz-Funktion ist gegeben durch:

$$x(p) = \frac{2\,000 - 5p}{3}$$

wobei p den Verkaufspreis pro ME des Gutes bezeichnet.

a) Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Preis-Absatz-Funktion $x(p)$an.

b) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $p(x)$ und geben Sie ihren Definitionsbereich und Wertebereich an.

c) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$ und ihren Definitionsbereich.

d) Bestimmen Sie die Funktion $g(x)$, die in Abhängigkeit der abgesetzten Menge x den Gewinn pro einer ME des Gutes angibt.

e) Die Fixkosten müssen aus innerbetrieblichen Gründen um 800 GE erhöht werden. Stellen Sie die neue Gewinnfunktion auf. Wie lautet die Funktion $g(x)$, die den Stückgewinn angibt?

Aufgabe 4.3
Für ein Unternehmen existiere die Gewinnfunktion

$$G(x) = -3x^2 + 150x - 600$$

und die Produktionsfunktion

$x(r) = 2\sqrt{r} - 20, \quad r \geq 100$

Die Produktionsfunktion gibt die ausgebrachte Menge x in Abhängigkeit der Einsatzmenge r des Produktionsfaktors (z. B. Arbeitszeit) an.
Der Produktionsfaktor r kann zu einem Preis von GE 6 je Einheit erworben werden. Weitere Kosten entstehen bei der Produktion nicht.

a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion $r(x)$ der Produktionsfunktion, die die benötigte Einsatzmenge des Produktionsfaktors in Abhängigkeit von der ausgebrachten Menge angibt. Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion $r(x)$an.

b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$.

c) Bestimmen Sie die Umsatzfunktion/Erlösfunktion $U(x)$.

d) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $p(x)$, die in Abhängigkeit der abgesetzten Menge x den Verkaufspreis pro einer ME des Gutes angibt.

e) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion $x(p)$, die in Abhängigkeit des Verkaufspreises p die abgesetzte Menge x des Gutes angibt.

Aufgabe 4.4
Für ein Unternehmen existiere die Gewinnfunktion

$G(x) = -4x^2 + 400x - 200; \quad x \geq 0$

und die Produktionsfunktion

$x(r) = 5 \cdot r^{\frac{1}{2}} - 10; \quad r \geq 4$

Der Produktionsfaktor r kann zu einem Preis von 50 GE je Einheit erworben werden. Weitere Kosten entstehen bei der Produktion nicht.
Bestimmen Sie aus diesen Informationen die Preis-Absatz-Funktion des Unternehmens und stellen Sie diese in Form $x(p)$ dar.
Bearbeitungshinweis: Bestimmen Sie nacheinander $r(x), K(x), U(x), p(x)$ und $x(p)$.

Aufgabe 4.5
Ergänzen Sie bitte die fehlenden Zahlen in der nachfolgenden Tabelle:

Firma	Preis	Output	Umsatz	Gesamtkosten	Fixkosten	Variable Kosten	Stückkosten	variable Stückkosten
1			800		100	360		36
2	5	500			500	8 00		
3			4 000	6 000			2,4	1,3
4			5 000	5 000	3 500			0,75
5	10	500		8 000				12

Lösung zu Aufgabe 4.1

a) $g(x) = 7x - 5$ und $f(y) = y^4$

b) $g(x) = 7x - 5$ und $f(y) = e^y$

c) $g(x) = x^4$ und $f(y) = 7y - 5$
oder $g(x) = 7x^4$ und $f(y) = y - 5$
oder ...

Lösung zu Aufgabe 4.2

a) Definitionsbereich: $p \in [0\,;\,400]$
Wertebereich: $x \in [0\,;\,666{,}\overline{6}]$

b) $p(x) = 400 - 0{,}6x$
Definitionsbereich: $x \in [0\,;\,666{,}\overline{6}]$
Wertebereich: $p \in [0\,;\,400]$

c) $G(x) = -0{,}01x^3 - 0{,}75x^2 + 390x - 200 \quad ; x \in [0\,;\,666{,}\overline{6}]$

d) $g(x) = -0{,}01x^2 - 0{,}75x + 390 - \dfrac{200}{x}$

e) $G(x) = -0{,}01x^3 - 0{,}75x^2 + 390x - 1\,000 \quad ; x \in [0\,;\,666{,}\overline{6}]$
$g(x) = -0{,}01x^2 - 0{,}75x + 390 - \dfrac{1\,000}{x}$

Lösung zu Aufgabe 4.3

a)
$$\begin{aligned}
x &= 2\sqrt{r} - 20 && \mid +20 \\
x + 20 &= 2\sqrt{r} && \mid \div 2 \\
0{,}5x + 10 &= \sqrt{r} && \mid \text{quadrieren} \\
(0{,}5x + 10)^2 &= r && \mid (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
0{,}25x^2 + 10x + 100 &= r
\end{aligned}$$
$r(x) = 0{,}25x^2 + 10x + 100$
Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}_0^+$
Wertebereich: $r \in [100; \infty)$

b) $K(x) = 6 \cdot r = 6 \cdot (0{,}25x^2 + 10x + 100) = 1{,}5x^2 + 60x + 600$

c) $U(x) = G(x) + K(x) = -1{,}5x^2 + 210x$

d) $p(x) = \dfrac{U(x)}{x} = -1{,}5x + 210$

e) $x(p) = 140 - \frac{2}{3}p$

Lösung zu Aufgabe 4.4

$$\begin{aligned}
x &= 5\sqrt{r} - 10 && \mid +10 \\
x + 10 &= 5\sqrt{r} && \mid \div 5 \\
0{,}2x + 2 &= \sqrt{r} && \mid \text{quadrieren} \\
(0{,}2x + 2)^2 &= r && \mid (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
0{,}04x^2 + 0{,}8x + 4 &= r
\end{aligned}$$

$$r(x) = \frac{x^2}{25} + \frac{4}{5}x + 4; \;\; x \geq 0$$

$$K(x) = 50 \cdot r = 50 \cdot \left(\frac{x^2}{25} + \frac{4}{5}x + 4\right) = 2x^2 + 40x + 200; \;\; x \geq 0$$

$$U(x) = G(x) + K(x) = -2x^2 + 440x; \;\; x \in [0; 220]$$

$$p(x) = \frac{U(x)}{x} = 440 - 2x; \;\; x \in [0; 220]$$

$$x(p) = 220 - 0{,}5p; \;\; p \in [0; 440]$$

Lösung zu Aufgabe 4.5

Firma	Preis	Output	Umsatz	Gesamtkosten	Fixkosten	Variable Kosten	Stückkosten	variable Stückkosten
1	80	10	800	460	100	360	46	36
2	5	500	2 500	1 300	500	800	2,6	1,6
3	1,6	2 500	4 000	6 000	2 750	3 250	2,4	1,3
4	2,5	2 000	5 000	5 000	3 500	1 500	2,5	0,75
5	10	500	5 000	8 000	2 000	6 000	16	12

Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

Übungen zur Vorlesung Wirtschaftsmathematik

Was ist falsch?

In den nachfolgenden alten Klausuraufgaben habe ich Lösungen mit typischen Fehlern aufgeschrieben. Versuchen Sie bitte, diese Fehler zu finden.

Aufgabe 3 (14.07.2004)
Ein monopolistisches Ein-Produkt-Unternehmen produziert seine Ausbringungsmenge x (in ME) mit Hilfe eines einzigen Produktionsfaktors r (in ME) gemäß folgender Produktionsfunktion:

$$x(r) = 2 \cdot \sqrt{r-1} \;;r \geq 1$$

Für jede eingesetzte Mengeneinheit des Produktionsfaktors fallen 16 Geldeinheiten an Kosten an. Weitere Kosten entstehen dem Unternehmen für die Produktion des Produktes nicht. Die Ausbringungsmenge x kann am Markt abgesetzt werden entsprechend der Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 40 - 0{,}25 \cdot p; \quad p \in [0; 160]$$

wobei p den Verkaufspreis pro ME bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Preis-Absatz Funktion $p(x)$ und geben Sie den Definitionsbereich an.

b) Zeigen Sie, dass sich für die Kostenfunktion $K(x) = 4x^2 + 16$ ergibt.

f) Bisher verlangte der Monopolist einen Preis von 120 GE pro ME und konnte insgesamt zehn Mengeneinheiten absetzen. Er entscheidet sich nun für eine 1%-ige Preissteigerung. Wie verändert sich hierdurch seine Absatzmenge?

Lösung zu Aufgabe 3

a)
$$\begin{aligned} x &= 40 - 0{,}25p & &| +0{,}25p \\ 0{,}25p + x &= 40 & &| -x \\ 0{,}25p &= 40 - x & &| \div 0{,}25 \\ p &= 160 - x & & \end{aligned}$$

d.h. $p(x) = 160 - x$

$0 = 160 - x \Rightarrow x = 160$ d.h. $x \in [0; 160]$.

b) $K(x) = 16r = ?$
$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot \sqrt{r-1} & &| \div 2 \\ 0{,}5x &= \sqrt{r-1} & &| \text{ quadrieren} \\ 0{,}25x &= r - 1 & &| +1 \\ 0{,}25x + 1 &= r & & \end{aligned}$$

$K(x) = 16 \cdot (0{,}25x + 1) = 4x + 16; \quad x \in [0; 40]$

f) *1. Lösungsweg:*
Preiserhöhung von 120 GE um 1% auf $120 \cdot 1{,}1 = 132$ GE

p	120	132
x	10	7

d.h. der Absatz sinkt um 3 ME auf 7 ME.

Aufgabe 2 (01.10.2012)
Ein Unternehmen produziert ein Gut für 10 Euro pro ME. Zusätzlich fallen Fixkosten in Höhe von 10 000 Euro an. Die Preis-Absatz Funktion zu diesem Gut sei

$$p(x) = 410 - 0{,}1x.$$

Dabei sind x die prodzuzierte und abgesetzte Menge und p der Preis des Gutes.

a) Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich und den zugehörigen Wertebereich (=Menge aller möglichen Funktionswerte) für die Preis-Absatz Funktion an.

b) Stellen Sie die Kosten-, Umsatz- (Erlös-) und Gewinnfunktion auf.

d) Wie verändert sich - ausgehend von $x = 2\,000$ ME - der Preis ungefähr, wenn die produzierte und abgesetzte Menge um ein Prozent steigt?

Lösung zu Aufgabe 2:

a)

x	p
0	410
4 100	0

; d.h. Definitionsbereich = [0;410] und Wertebereich = [0;4 100]

b) $K(x) = 10x + 10\,000$
$U(x) = 410x - 0{,}1x = 409{,}9x$
$G(x) = 409{,}9x - 10x + 10\,000 = 399{,}9x + 10\,000$

d)

x	2 000	2 020
p	210	208

$\frac{208}{210} = 0{,}9904$
Rate=Faktor $-1 = 0{,}9904 - 1 = -0{,}0096$
d.h. wird die produzierte und abgesetzte Menge von 2 000 ME um ein Prozent erhöht, so muss der Preis um 0,96 GE gesenkt werden.