TECHNISCHE HOCHSCHULE KÖLN

Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften

Formelsammlung

QUANTITATIVE METHODEN

Herausgeber: Fachgruppe Quantitative Methoden

M Formeln zur Mathematik

M.1 Ableitungen

Funktion	Ableitung
$f(x) = c;\ c \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^t;\ t \in \mathbb{R}$	$f'(x) = t \cdot x^{t-1}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x;\ a > 0$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x);\ 0 < a \neq 1$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

M.2 Ableitungsregeln

	Funktion	Ableitung
Faktorregel	$c \cdot f(x)$	$c \cdot f'(x)$
Summenregel	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Produktregel	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Kettenregel	$f\left(g(x)\right)$	$f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

M.3 Elastizität

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)},\ x \neq 0,\ f(x) \neq 0$$

M.4 Partielle Elastizität

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{x \cdot f_x(x,y)}{f(x,y)},\ x \neq 0,\ f(x,y) \neq 0$$

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = \frac{y \cdot f_y(x,y)}{f(x,y)},\ y \neq 0,\ f(x,y) \neq 0$$

F Formeln zur Finanzmathematik

F.1 Zinsmodelle

Bezeichnungen

K_0	Anfangskapital
n	Laufzeit in Jahren
K_n	Kapital nach n Jahren
p	jährlicher Zinsfuß
$i = \frac{p}{100}$	jährlicher Zinssatz
$q = 1 + i$	jährlicher Aufzinsungsfaktor
m	Anzahl der unterjährlichen Zinsperioden innerhalb eines Jahres
k	in der Laufzeit enthaltene volle Jahre
$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$	Jahresbruchteile

F.1.1 Lineare Verzinsung

$K_n = K_0(1 + i \cdot n);\ \ n \geq 0$

F.1.2 Jährlich nachschüssige Verzinsung mit Zinseszins

$K_n = K_0 \cdot q^n;\ \ n \in \mathbb{N}$

$$n = \frac{\ln(K_n) - \ln(K_0)}{\ln(q)} = \frac{\ln\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\ln(q)} \text{ (Laufzeitformel)}$$

F.1.3 Jährlich vorschüssige Verzinsung mit Zinseszins

$$K_n = \frac{K_0}{(1-i)^n};\ \ n \in \mathbb{N}$$

$$i' = \frac{i}{1-i} \text{ (effektiver Jahreszinssatz)}$$

F.1.4 Unterjährliche Verzinsung zum relativen Zinssatz

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n \cdot m};\ \ n \geq 0, m \in \mathbb{N}, n \cdot m \in \mathbb{N},$$

$$j = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 \text{ (effektiver Jahreszinssatz)}$$

F.1.5 Konforme Verzinsung

$K_n = K_0 \cdot q^n;\ \ n \geq 0$

F.1.6 Relativ gemischte Verzinsung

$K_{k+\gamma} = K_0 \cdot q^k \cdot (1 + \gamma \cdot i);\ \ k \in \mathbb{N}_0; \gamma \in (0,1)$

F.1.7 Bankmäßig gemischte Verzinsung

$K_{\gamma_1+k+\gamma_2} = K_0 \cdot (1 + \gamma_1 \cdot i) \cdot q^k \cdot (1 + \gamma_2 \cdot i);\ \ k \in \mathbb{N}_0; \gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$

F.1.8 Stetige Verzinsung

$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}; n \geq 0$

F.2 Rentenrechnung

F.2.1 Jährliche Rentenzahlungen bei nachschüssiger Verzinsung mit Zinseszins

Bezeichnungen

n	Laufzeit einer Rente in Jahren
R_n	Rentenendwert
R_0	Rentenbarwert
r	jährliche Rentenrate bei nachschüssiger Zahlweise
r'	jährliche Rentenrate bei vorschüssiger Zahlweise

Rentenendwert bei nachschüssiger Zahlweise

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Rentenbarwert bei nachschüssiger Zahlweise

$$R_0 = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$$

Laufzeit einer Rente bei nachschüssiger Zahlweise

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{R_n}{r} \cdot (q-1)\right)}{\ln(q)} \qquad \text{(bei gegebenem Endwert)}$$

$$n = -\frac{\ln\left(1 - \frac{R_0}{r} \cdot (q-1)\right)}{\ln(q)} \qquad \text{(bei gegebenem Barwert)}$$

Zusammenhang zwischen vorschüssigen und nachschüssigen Jahresrenten

$$r = r' \cdot q$$

F.2.2 Unterjährliche Rentenzahlungen

Bezeichnungen

r_u	Rentenrate bei nachschüssiger unterjährlicher Zahlweise
r'_u	Rentenrate bei vorschüssiger unterjährlicher Zahlweise
r_j	jährliche nachschüssige Ersatzrente
m	Anzahl der unterjährlichen Rentenzahlungen innerhalb eines Jahres

Unterjährlich nachschüssige Zahlweise

$$r_j = r_u \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i\right)$$

Unterjährlich vorschüssige Zahlweise

$$r_j = r'_u \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i\right)$$

F.3 Tilgungsrechnung

Bezeichnungen

K_0	Anfangskapital
n	Laufzeit in Jahren
K_k	Kapital am Ende des k-ten Jahres
T_k	Tilgungsrate für das k-te Jahr
A_k	Annuität für das k-te Jahr
Z_k	Zinsen für das k-te Jahr
i	jährlicher Zinssatz
q	jährlicher Aufzinsungsfaktor
t	anfänglicher Tilgungssatz (Prozent-Annuitätentilgung)

F.3.1 Ratentilgung

$T = T_k = \dfrac{K_0}{n}$	Tilgungsrate (gleich bleibend)
$A_k = T_k + Z_k = T + Z_k$	Annuität für das k-te Jahr
$K_k = (n-k) \cdot T$	Kapital am Ende des k-ten Jahres
$Z_k = (n-k+1) \cdot T \cdot i$	Zinsen für das k-te Jahr
$Z_0 = K_0 - T \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1} \cdot \dfrac{1}{q^n}$	Barwert aller Zinszahlungen

F.3.2 Annuitätentilgung

$A = A_k = T_k + Z_k$	Annuität (gleich bleibend)
$A = K_0 \cdot (i+t)$	Prozent-Annuität
$K_0 \cdot q^n = A \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}$	EULER'sche Tilgungsgleichung (Endwertdarstellung)
$K_0 = A \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1} \cdot \dfrac{1}{q^n}$	EULER'sche Tilgungsgleichung (Barwertdarstellung)
$A = T_1 \cdot q^n$	Annuität (gleich bleibend)
$T_k = T_1 \cdot q^{k-1}$	Tilgungsrate für das k-te Jahr
$K_k = K_0 \cdot q^k - A \cdot \dfrac{q^k - 1}{q-1}$	Kapital am Ende des k-ten Jahres
$n = -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{K_0}{A} \cdot (q-1)\right)}{\ln(q)}$	Laufzeit
$n = \dfrac{\ln(i+t) - \ln(t)}{\ln(q)}$	Laufzeit

F.4 Investitionsrechnung

Bezeichnungen

C_0	Anschaffungswert / Herstellungskosten
n	Laufzeit der Investition in Jahren
C_k	Überschuss am Ende des k-ten Jahres
i	jährlicher Zinssatz
q	jährlicher Aufzinsungsfaktor
K_0	Kapitalwert
i^*	interner Zinssatz

F.4.1 Kapitalwert

$$K_0 = C_1 \cdot \frac{1}{1+i} + C_2 \cdot \frac{1}{(1+i)^2} + C_3 \cdot \frac{1}{(1+i)^3} + \cdots + C_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} - C_0$$

F.4.2 Interner Zinssatz

Der Zinssatz i^*, für den der Kapitalwert K_0 den Wert null annimmt, heißt interner Zinssatz.

F.5 Abschreibungen

Bezeichnungen

B_0	Anschaffungswert / Herstellungskosten
n	Abschreibungszeitraum in Jahren
B_k	Buchwert am Ende des k-ten Jahres
a	Abschreibungssatz

F.5.1 Abschreibungsverfahren

	Lineare Abschreibung	Geometrische degressive Abschreibung (Abschreibungssatz a)
Abschreibungsbetrag am Ende des k-ten Jahres	$\frac{B_0}{n}$	$B_0 \cdot (1-a)^{k-1} \cdot a$
Buchwert am Ende des k-ten Jahres	$B_0 - \frac{B_0}{n} \cdot k$	$B_0\,(1-a)^k$
Buchwert am Ende des n-ten Jahres	0	$B_0\,(1-a)^n$
Barwert aller Abschreibungsbeträge	$\frac{q^n-1}{q-1} \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{B_0}{n}$	$B_0 \cdot a \cdot \frac{q^n-(1-a)^n}{[q-(1-a)] \cdot q^n}$

Ungleichung für den günstigsten Zeitpunkt x des Übergangs von der geometrisch degressiven zur linearen Abschreibung: $x \geq n+1-\frac{1}{a}$

Anzahl y der Jahre, in denen linear abgeschrieben wird bei Übergang von der geometrisch degressiven zur linearen Abschreibung: $y \leq \frac{1}{a}$

S Formeln zur Statistik

S.1 Eindimensionale Häufigkeitsverteilungen von klassierten Daten

Bezeichnungen

x_j^*	Obergrenze der Einfallsklasse
x_{j-1}^*	Untergrenze der Einfallsklasse
$\frac{n_j}{n}$	relative Häufigkeit der Einfallsklasse
b_j	$x_j^* - x_{j-1}^*$ Breite der Einfallsklasse
F	kumulierte relative Häufigkeiten

S.1.1 Anteilswerte

$$F(x) \approx F(x_{j-1}^*) + \frac{n_j/n}{b_j} \cdot (x - x_{j-1}^*) \qquad \text{für } x \in (x_{j-1}^*; x_j^*]$$

S.1.2 Prozentpunkte (p-Quantile)

$$x_p \approx x_{j-1}^* + \frac{p - F(x_{j-1}^*)}{n_j/n} \cdot b_j \qquad \text{für } p \in \big(F(x_{j-1}^*); F(x_j^*)\big]$$

S.2 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bezeichnungen

S= Stichprobenraum
A= Ereignis

S.2.1 Wahrscheinlichkeiten

S.2.1.1 Allgemeine Regeln nach A. Kolmogorov

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$
(b) $P(\mathsf{S}) = 1$
(c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; wenn $A \cap B = \emptyset$

S.2.1.2 Spezielle Begriffe

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff nach P. Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller gleich möglichen Ergebnisse}}$$

Statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff nach R. von Mises:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

S.2.2 Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

S.2.2.1 Additionssatz

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

S.2.2.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

(a) Definition

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ \text{, für } P(B) > 0$$

(b) Allgemeiner Muliplikationssatz

$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A)$

(c) Stochastisch unabhängige Ereignisse

$P(A \mid B) = P(A)$
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

(d) Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P(A \mid B_i)$$

(e) Satz von Bayes

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + \ldots + P(A \mid B_k) \cdot P(B_k)}$$

S.3 Kombinatorik

S.3.1 Permutationen

Anzahl der Permutationen des n-Tupels $(1, \dots, n)$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Anzahl der Permutationen des n-Tupels $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n_1\text{-mal}}, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_2\text{-mal}}, \dots, \underbrace{k, k, \dots, k}_{n_k\text{-mal}})$

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

S.3.2 Kombinationen

Ziehen von k Elementen aus n Elementen

S.3.2.1 ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

S.3.2.2 mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$n^k$$

S.3.2.3 ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\binom{n}{k}$$

S.3.2.4 mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\binom{n+k-1}{k}$$

S.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Bezeichnungen

X = Zufallsvariable

Y = Zufallsvariable

$F(x) = P(X \leq x)$ Verteilungsfunktion

S.4.1 Diskrete Zufallsvariable

x_i = mögliche angeordnete Werte der Zufallsvariablen X

y_j = mögliche angeordnete Werte der Zufallsvariablen Y

S.4.1.1 Einzelwahrscheinlichkeiten

$f(x_i) = P(X = x_i)$ mit $\sum_i f(x_i) = 1$

S.4.1.2 Verteilungsfunktion an der Stelle x_i

$F(x_i) = P(X \leq x_i) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_i)$

S.4.1.3 Stochastische Unabhängigkeit

$P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ für alle x_i, y_j

S.4.2 Stetige Zufallsvariable

S.4.2.1 Dichtefunktion

$f(x) \geq 0$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d(x) = 1$

S.4.2.2 Verteilungsfunktion an der Stelle x_0

$F(x_0) = P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\, d(x)$

S.5 Lageparameter/Lagemaße

S.5.1 Empirisch

S.5.1.1 Median = Zentralwert = 50%-Punkt

S.5.1.2 Modus/häufigster bzw. dichtester Wert

S.5.1.3 Arithmetisches Mittel

Arithmetisches Mittel aus Einzelwerten

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Arithmetisches Mittel aus tabellierten Daten

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i$$

Arithmetisches Mittel aus klassierten Daten

$$\overline{x} \approx \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x'_j \cdot n_j$$

mit $x'_j =$ Klassenmitte

S.5.1.4 Geometrisches Mittel aus Einzelwerten

$$\overline{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \qquad \text{mit } x_i > 0 \text{ für alle } i$$

S.5.1.5 Harmonisches Mittel

$$\overline{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

S.5.2 Theoretisch

S.5.2.1 Erwartungswert

$$\mu_X = E[X] = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) & \text{wenn X diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, d(x) & \text{wenn X stetig} \end{cases}$$

S.6 Streuungsparameter/Streuungsmaße

S.6.1 Empirisch

S.6.1.1 Spannweite aus Einzelwerten

$R = \max\{x_1, \ldots, x_n\} - \min\{x_1, \ldots, x_n\} = x_{(n)} - x_{(1)}$

S.6.1.2 Quartilsabstand

$Q \approx x_{0,75} - x_{0,25}$

S.6.1.3 Varianz

Varianz aus Einzelwerten

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - (\overline{x})^2$$

oder $\dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$

Varianz aus tabellierten Daten

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \cdot n_i \right) - (\overline{x})^2$$

oder $\dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i$

Varianz aus klassierten Daten

$$s_x^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} (x'_j - \overline{x})^2 \cdot n_j = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} (x'_j)^2 \cdot n_j \right) - (\overline{x})^2$$

oder $\dfrac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{k} (x'_j - \overline{x})^2 \cdot n_j$

S.6.1.4 Standardabweichung

$s_x = \sqrt{s_x^2}$

S.6.1.5 Variationskoeffizient

$v = \dfrac{s_x}{\overline{x}}$

S.6.1.6 Relativer Quartilsabstand

$\dfrac{x_{0,75} - x_{0,25}}{x_{0,50}}$

S.6.2 Theoretisch

S.6.2.1 Varianz

$$\sigma_X^2 = Var[X] = \begin{cases} \sum_i (x_i - E[X])^2 \cdot P(X = x_i) = \sum_i x_i^2 P(X = x_i) - (E[X])^2 & \text{wenn X diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x)\, d(x) & \text{wenn X stetig} \end{cases}$$

S.6.2.2 Standardabweichung

$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$

S.7 Parameter bivariater empirischer Verteilungen

S.7.1 Kovarianz

Kovarianz aus Einzelwerten

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right) - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Kovarianz aus tabellierten Daten

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q}(x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y}) \cdot n_{i,j} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q} x_i \cdot y_j \cdot n_{i,j}\right) - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

S.7.2 Regression

S.7.2.1 Regression von Y auf X

Regressionsgerade $\widehat{y}_i = a_1 + b_1 \cdot x_i$

Lösungsformeln

$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a_1 = \overline{y} - b_1 \cdot \overline{x} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - b_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$$

S.7.2.2 Regression von X auf Y

Regressionsgerade $\widehat{x}_i = a_2 + b_2 \cdot y_i$

Lösungsformeln

$$b_2 = \frac{s_{xy}}{s_y^2} = \frac{n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}$$

$$a_2 = \overline{x} - b_2 \cdot \overline{y} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - b_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n}$$

S.7.3 Korrelation

S.7.3.1 Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] \cdot \left[n \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}}$$

wobei $-1 \leq r_{xy} \leq +1$

S.7.3.2 Bestimmtheitsmaß

$$B = \frac{b_1^2 \cdot s_x^2}{s_y^2} = \frac{b_2^2 \cdot s_y^2}{s_x^2}$$

$$B = (r_{xy})^2 = b_1 \cdot b_2 \qquad \text{wobei } 0 \leq B \leq +1$$

S.8 Indizes

Bezeichnungen

Symbol	Bedeutung
q	Menge
p	Preis je Mengeneinheit
0	Basisjahr
t	Berichtsjahr
i	Laufindex der m Güter

S.8.1 Wertindex

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^t \, q_i^t}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0 \, q_i^0}$$

S.8.2 Mengenindex

S.8.2.1 Mengenindex nach Laspeyres

$$Q^{La} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^0 \, q_i^t}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0 \, q_i^0} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right) \cdot \left(\frac{p_i^0 \, q_i^0}{\sum_{j=1}^{m} p_j^0 \, q_j^0} \right)$$

S.8.2.2 Mengenindex nach Paasche

$$Q^{Pa} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^t \, q_i^t}{\sum_{i=1}^{m} p_i^t \, q_i^0} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{q_i^t}{q_i^0} \right) \cdot \left(\frac{p_i^t \, q_i^0}{\sum_{j=1}^{m} p_j^t \, q_j^0} \right)$$

S.8.3 Preisindex

S.8.3.1 Preisindex nach Laspeyres

$$P^{La} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^t \, q_i^0}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0 \, q_i^0} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) \cdot \left(\frac{p_i^0 \, q_i^0}{\sum_{j=1}^{m} p_j^0 \, q_j^0} \right)$$

S.8.3.2 Preisindex nach Paasche

$$P^{Pa} = \frac{\sum_{i=1}^{m} p_i^t \, q_i^t}{\sum_{i=1}^{m} p_i^0 \, q_i^t} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{p_i^t}{p_i^0} \right) \cdot \left(\frac{p_i^0 \, q_i^t}{\sum_{j=1}^{m} p_j^0 \, q_j^t} \right)$$

S.8.4 Zusammenhang von Wert-, Mengen- und Preisindex

$$W = P^{La} \cdot Q^{Pa} = P^{Pa} \cdot Q^{La}$$

S.9 Binomialverteilung $X \sim \mathsf{B}(n;p)$

S.9.1 Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x};\;\; x=0,1,2,\ldots,n$$

S.9.2 Erwartungswert

$$E[X]=n\cdot p$$

S.9.3 Standardabweichung

$$\sqrt{Var[X]}=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$$

S.9.4 Näherungslösung durch Normalverteilung mit $\mu = n\cdot p$ und $\sigma=\sqrt{np(1-p)}$

$$P(X\le x)\approx P\left(U\le\frac{x+0{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=F_U\left(\frac{x+0{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

wenn $np\ge 10$ und $n(1-p)\ge 10$

$$P(X=x)=P(X\le x)-P(X\le x-1)\approx F_U\left(\frac{x+0{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-F_U\left(\frac{x-0{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

wenn $np\ge 10$ und $n(1-p)\ge 10$

S.10 Hypergeometrische Verteilung $X \sim \mathsf{H}(N;M;n)$

S.10.1 Einzelwahrscheinlichkeiten

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}\text{ für }\max\{0,n-(N-M)\}\le x\le\min\{n,M\}$$

S.10.2 Erwartungswert

$$E[X]=n\cdot\frac{M}{N}$$

S.10.3 Standardabweichung

$$\sqrt{Var[X]}=\sqrt{n\cdot\frac{M}{N}\cdot\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\frac{N-n}{N-1}}$$

S.10.4 Näherungslösung durch Binomialverteilung mit n und $p=\frac{M}{N}$

$$P(X=x)\approx\binom{n}{x}\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^x\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-x};\text{ wenn }\frac{n}{N}\le 0{,}05$$

S.11 Normalverteilung $X \sim \mathsf{N}(\mu;\sigma)$

S.11.1 Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \; ; \quad x \in \mathbb{R}$$

mit $\pi = 3{,}14\ldots$ und $e = 2{,}71828\ldots$

S.11.2 Erwartungswert

$$E[X] = \mu$$

S.11.3 Standardabweichung

$$\sqrt{Var[X]} = \sigma$$

S.11.4 Standardisierung der Zufallsvariablen X

$$U = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ mit } U \sim \mathsf{N}(0;1)$$

bzw.

$$P(X \leq x) = P\left(U \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_U\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \text{ tabelliert}$$

S.11.5 Zentraler Grenzwertsatz

Approximation einer beliebigen Verteilung durch die Normalverteilung:
Ist die Verteilung von X schief, aber nicht extrem asymmetrisch, so genügt schon ein Stichprobenumfang von $n \geq 30$, um eine annähernde Normalverteilung der endlichen Summe der stochastisch unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1 + \ldots + X_n$ bzw. des Durchschnitts zu gewährleisten.

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) \approx P\left(U \leq \frac{x-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = F_U\left(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

bzw.

$$P(\overline{X} \leq x) \approx P\left(U \leq \frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = F_U\left(\frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

mit $E[X] = \mu$ und $\sqrt{Var[X]} = \sigma \in (0;\infty)$

S.12 Konfidenzintervalle

S.12.1 Approximatives Konfidenzintervall für den Mittelwert $E[X]$, falls $n \geq 30$

$$\left[\overline{x} - u \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}\,;\, \overline{x} + u \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}\right] \text{ mit dem Konfidenzniveau } 1-\alpha$$

u ist das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standard-Normalverteilung

Das Konfidenzintervall für den Mittelwert $E[X]$ hat die Breite $2 \cdot \varepsilon$, falls

$$n \geq \frac{u^2 \cdot \sigma^2}{\epsilon^2}$$

S.12.2 Approximatives Konfidenzintervall für den Anteilswert p, falls $n \geq 100$

$$\left[\widehat{p} - u \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\,;\, \widehat{p} + u \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right] \text{ mit dem Konfidenzniveau } 1-\alpha$$

u ist das $(1-\frac{\alpha}{2})-$Quantil der Standard-Normalverteilung

Das Konfidenzintervall für den Anteilswert p hat die Breite $2 \cdot \varepsilon$, falls

$$n \geq \frac{u^2 \cdot \widehat{p}_{\text{alt}}(1-\widehat{p}_{\text{alt}})}{\epsilon^2}$$

bzw.

$$n \geq \frac{u^2 \cdot 0{,}25}{\epsilon^2}$$

S.13 Statistische Tests

S.13.1 Gaußtest (zweiseitig)

$H_0 : E[X] = \mu_0$ gegen $H_1 : E[X] \neq \mu_0$
Ablehnung von $H_0 \Leftrightarrow p$-Wert $\leq \alpha$,
falls X normalverteilt ist mit der bekannten theoretischen Varianz σ^2.

$$p\text{-Wert} = 2 \cdot F_U \left(- \mid \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \right)$$

S.13.2 *t*-Test (zweiseitig)

$H_0 : E[X] = \mu_0$ gegen $H_1 : E[X] \neq \mu_0$
Ablehnung von $H_0 \Leftrightarrow p$-Wert $\leq \alpha$,
falls der Stichprobenumfang n mindestens 30 beträgt.

$$p\text{-Wert} \approx 2 \cdot F_U \left(- \mid \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \mid \right)$$

S.13.3 Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest

$H_0 : X, Y$ sind stochastisch unabhängig
gegen
$H_1 : X, Y$ sind stochastisch abhängig
Ablehnung von $H_0 \Leftrightarrow p$-Wert $\leq \alpha$

Faustregel: In der Kontingenztabelle dürfen höchstens 20% aller Zellen eine erwartete Häufigkeit kleiner als fünf haben. Und die minimale erwartete Häufigkeit muss mindestens eins betragen.

Der Freiheitsgrad df einer Kontingenztabelle mit I Zeilen und J Spalten beträgt $df = (I-1)(J-1)$.

$$\chi^2_{\text{emp.}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(\mid n_{ij} - \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n} \mid -0{,}5 \right)^2}{\frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}} \quad \text{, falls } df = 1.$$

$$\chi^2_{\text{emp.}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n} \right)^2}{\frac{n_{i\bullet} \cdot n_{\bullet j}}{n}} \quad \text{, falls } df > 1.$$

Falls $\chi^2_{\text{emp.}}$ gleich oder größer ist als der obere α-Prozentpunkt der Chi-Quadratverteilung mit $(I-1)(J-1)$ Freiheitsgraden, wird die Nullhypothese abgelehnt.

S.13.4 Chi-Quadrat-Anpassungstest

$H_0 :$ Die Variable hat die Verteilung F
gegen
$H_1 :$ Die Variable hat nicht die Verteilung F
Ablehnung von $H_0 \Leftrightarrow p$-Wert $\leq \alpha$,
wobei F eine spezifische theoretische Verteilungsfunktion mit $I \in \mathbb{N}$ spezifischen Einzelwahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_I$ ist.

Faustregel: $n \cdot p_i \geq 5$ für alle $i = 1, 2, \ldots, I$

$$\chi^2_{\text{emp.}} = \sum_{i=1}^{I} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

Falls $\chi^2_{\text{emp.}}$ gleich oder größer ist als der obere α-Prozentpunkt der Chi-Quadratverteilung mit $(I-1)$ Freiheitsgraden, wird die Nullhypothese abgelehnt.

S.14 Tabellen

S.14.1 Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung

Ablesebeispiel: $P(U \leq u) = 0{,}164 \quad \Rightarrow \quad u = -0{,}9782$

$u = -0{,}9822 \quad \Rightarrow \quad P(U \leq u) = 0{,}163$

Wkt.	,000	,001	,002	,003	,004	,005	,006	,007	,008	,009
0,00		−3,0902	−2,8782	−2,7478	−2,6521	−2,5758	−2,5121	−2,4573	−2,4089	−2,3656
0,01	−2,3263	−2,2904	−2,2571	−2,2262	−2,1973	−2,1701	−2,1444	−2,1201	−2,0969	−2,0749
0,02	−2,0537	−2,0335	−2,0141	−1,9954	−1,9774	−1,9600	−1,9431	−1,9268	−1,9110	−1,8957
0,03	−1,8808	−1,8663	−1,8522	−1,8384	−1,8250	−1,8119	−1,7991	−1,7866	−1,7744	−1,7624
0,04	−1,7507	−1,7392	−1,7279	−1,7169	−1,7060	−1,6954	−1,6849	−1,6747	−1,6646	−1,6546
0,05	−1,6449	−1,6352	−1,6258	−1,6164	−1,6072	−1,5982	−1,5893	−1,5805	−1,5718	−1,5632
0,06	−1,5548	−1,5464	−1,5382	−1,5301	−1,5220	−1,5141	−1,5063	−1,4985	−1,4909	−1,4833
0,07	−1,4758	−1,4684	−1,4611	−1,4538	−1,4466	−1,4395	−1,4325	−1,4255	−1,4187	−1,4118
0,08	−1,4051	−1,3984	−1,3917	−1,3852	−1,3787	−1,3722	−1,3658	−1,3595	−1,3532	−1,3469
0,09	−1,3408	−1,3346	−1,3285	−1,3225	−1,3165	−1,3106	−1,3047	−1,2988	−1,2930	−1,2873
0,10	−1,2816	−1,2759	−1,2702	−1,2646	−1,2591	−1,2536	−1,2481	−1,2426	−1,2372	−1,2319
0,11	−1,2265	−1,2212	−1,2160	−1,2107	−1,2055	−1,2004	−1,1952	−1,1901	−1,1850	−1,1800
0,12	−1,1750	−1,1700	−1,1650	−1,1601	−1,1552	−1,1503	−1,1455	−1,1407	−1,1359	−1,1311
0,13	−1,1264	−1,1217	−1,1170	−1,1123	−1,1077	−1,1031	−1,0985	−1,0939	−1,0893	−1,0848
0,14	−1,0803	−1,0758	−1,0714	−1,0669	−1,0625	−1,0581	−1,0537	−1,0494	−1,0450	−1,0407
0,15	−1,0364	−1,0322	−1,0279	−1,0237	−1,0194	−1,0152	−1,0110	−1,0069	−1,0027	−0,9986
0,16	−0,9945	−0,9904	−0,9863	−0,9822	−0,9782	−0,9741	−0,9701	−0,9661	−0,9621	−0,9581
0,17	−0,9542	−0,9502	−0,9463	−0,9424	−0,9385	−0,9346	−0,9307	−0,9269	−0,9230	−0,9192
0,18	−0,9154	−0,9116	−0,9078	−0,9040	−0,9002	−0,8965	−0,8927	−0,8890	−0,8853	−0,8816
0,19	−0,8779	−0,8742	−0,8705	−0,8669	−0,8633	−0,8596	−0,8560	−0,8524	−0,8488	−0,8452
0,20	−0,8416	−0,8381	−0,8345	−0,8310	−0,8274	−0,8239	−0,8204	−0,8169	−0,8134	−0,8099
0,21	−0,8064	−0,8030	−0,7995	−0,7961	−0,7926	−0,7892	−0,7858	−0,7824	−0,7790	−0,7756
0,22	−0,7722	−0,7688	−0,7655	−0,7621	−0,7588	−0,7554	−0,7521	−0,7488	−0,7454	−0,7421
0,23	−0,7388	−0,7356	−0,7323	−0,7290	−0,7257	−0,7225	−0,7192	−0,7160	−0,7128	−0,7095
0,24	−0,7063	−0,7031	−0,6999	−0,6967	−0,6935	−0,6903	−0,6871	−0,6840	−0,6808	−0,6776
0,25	−0,6745	−0,6713	−0,6682	−0,6651	−0,6620	−0,6588	−0,6557	−0,6526	−0,6495	−0,6464
0,26	−0,6433	−0,6403	−0,6372	−0,6341	−0,6311	−0,6280	−0,6250	−0,6219	−0,6189	−0,6158
0,27	−0,6128	−0,6098	−0,6068	−0,6038	−0,6008	−0,5978	−0,5948	−0,5918	−0,5888	−0,5858
0,28	−0,5828	−0,5799	−0,5769	−0,5740	−0,5710	−0,5681	−0,5651	−0,5622	−0,5592	−0,5563
0,29	−0,5534	−0,5505	−0,5476	−0,5446	−0,5417	−0,5388	−0,5359	−0,5330	−0,5302	−0,5273
0,30	−0,5244	−0,5215	−0,5187	−0,5158	−0,5129	−0,5101	−0,5072	−0,5044	−0,5015	−0,4987
0,31	−0,4959	−0,4930	−0,4902	−0,4874	−0,4845	−0,4817	−0,4789	−0,4761	−0,4733	−0,4705
0,32	−0,4677	−0,4649	−0,4621	−0,4593	−0,4565	−0,4538	−0,4510	−0,4482	−0,4454	−0,4427
0,33	−0,4399	−0,4372	−0,4344	−0,4316	−0,4289	−0,4261	−0,4234	−0,4207	−0,4179	−0,4152
0,34	−0,4125	−0,4097	−0,4070	−0,4043	−0,4016	−0,3989	−0,3961	−0,3934	−0,3907	−0,3880
0,35	−0,3853	−0,3826	−0,3799	−0,3772	−0,3745	−0,3719	−0,3692	−0,3665	−0,3638	−0,3611
0,36	−0,3585	−0,3558	−0,3531	−0,3505	−0,3478	−0,3451	−0,3425	−0,3398	−0,3372	−0,3345
0,37	−0,3319	−0,3292	−0,3266	−0,3239	−0,3213	−0,3186	−0,3160	−0,3134	−0,3107	−0,3081
0,38	−0,3055	−0,3029	−0,3002	−0,2976	−0,2950	−0,2924	−0,2898	−0,2871	−0,2845	−0,2819
0,39	−0,2793	−0,2767	−0,2741	−0,2715	−0,2689	−0,2663	−0,2637	−0,2611	−0,2585	−0,2559
0,40	−0,2533	−0,2508	−0,2482	−0,2456	−0,2430	−0,2404	−0,2378	−0,2353	−0,2327	−0,2301
0,41	−0,2275	−0,2250	−0,2224	−0,2198	−0,2173	−0,2147	−0,2121	−0,2096	−0,2070	−0,2045
0,42	−0,2019	−0,1993	−0,1968	−0,1942	−0,1917	−0,1891	−0,1866	−0,1840	−0,1815	−0,1789
0,43	−0,1764	−0,1738	−0,1713	−0,1687	−0,1662	−0,1637	−0,1611	−0,1586	−0,1560	−0,1535
0,44	−0,1510	−0,1484	−0,1459	−0,1434	−0,1408	−0,1383	−0,1358	−0,1332	−0,1307	−0,1282
0,45	−0,1257	−0,1231	−0,1206	−0,1181	−0,1156	−0,1130	−0,1105	−0,1080	−0,1055	−0,1030
0,46	−0,1004	−0,0979	−0,0954	−0,0929	−0,0904	−0,0878	−0,0853	−0,0828	−0,0803	−0,0778
0,47	−0,0753	−0,0728	−0,0702	−0,0677	−0,0652	−0,0627	−0,0602	−0,0577	−0,0552	−0,0527
0,48	−0,0502	−0,0476	−0,0451	−0,0426	−0,0401	−0,0376	−0,0351	−0,0326	−0,0301	−0,0276
0,49	−0,0251	−0,0226	−0,0201	−0,0176	−0,0150	−0,0125	−0,0100	−0,0075	−0,0050	−0,0025

Wkt.	,000	,001	,002	,003	,004	,005	,006	,007	,008	,009
0,50	0,0000	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100	0,0125	0,0150	0,0176	0,0201	0,0226
0,51	0,0251	0,0276	0,0301	0,0326	0,0351	0,0376	0,0401	0,0426	0,0451	0,0476
0,52	0,0502	0,0527	0,0552	0,0577	0,0602	0,0627	0,0652	0,0677	0,0702	0,0728
0,53	0,0753	0,0778	0,0803	0,0828	0,0853	0,0878	0,0904	0,0929	0,0954	0,0979
0,54	0,1004	0,1030	0,1055	0,1080	0,1105	0,1130	0,1156	0,1181	0,1206	0,1231
0,55	0,1257	0,1282	0,1307	0,1332	0,1358	0,1383	0,1408	0,1434	0,1459	0,1484
0,56	0,1510	0,1535	0,1560	0,1586	0,1611	0,1637	0,1662	0,1687	0,1713	0,1738
0,57	0,1764	0,1789	0,1815	0,1840	0,1866	0,1891	0,1917	0,1942	0,1968	0,1993
0,58	0,2019	0,2045	0,2070	0,2096	0,2121	0,2147	0,2173	0,2198	0,2224	0,2250
0,59	0,2275	0,2301	0,2327	0,2353	0,2378	0,2404	0,2430	0,2456	0,2482	0,2508
0,60	0,2533	0,2559	0,2585	0,2611	0,2637	0,2663	0,2689	0,2715	0,2741	0,2767
0,61	0,2793	0,2819	0,2845	0,2871	0,2898	0,2924	0,2950	0,2976	0,3002	0,3029
0,62	0,3055	0,3081	0,3107	0,3134	0,3160	0,3186	0,3213	0,3239	0,3266	0,3292
0,63	0,3319	0,3345	0,3372	0,3398	0,3425	0,3451	0,3478	0,3505	0,3531	0,3558
0,64	0,3585	0,3611	0,3638	0,3665	0,3692	0,3719	0,3745	0,3772	0,3799	0,3826
0,65	0,3853	0,3880	0,3907	0,3934	0,3961	0,3989	0,4016	0,4043	0,4070	0,4097
0,66	0,4125	0,4152	0,4179	0,4207	0,4234	0,4261	0,4289	0,4316	0,4344	0,4372
0,67	0,4399	0,4427	0,4454	0,4482	0,4510	0,4538	0,4565	0,4593	0,4621	0,4649
0,68	0,4677	0,4705	0,4733	0,4761	0,4789	0,4817	0,4845	0,4874	0,4902	0,4930
0,69	0,4959	0,4987	0,5015	0,5044	0,5072	0,5101	0,5129	0,5158	0,5187	0,5215
0,70	0,5244	0,5273	0,5302	0,5330	0,5359	0,5388	0,5417	0,5446	0,5476	0,5505
0,71	0,5534	0,5563	0,5592	0,5622	0,5651	0,5681	0,5710	0,5740	0,5769	0,5799
0,72	0,5828	0,5858	0,5888	0,5918	0,5948	0,5978	0,6008	0,6038	0,6068	0,6098
0,73	0,6128	0,6158	0,6189	0,6219	0,6250	0,6280	0,6311	0,6341	0,6372	0,6403
0,74	0,6433	0,6464	0,6495	0,6526	0,6557	0,6588	0,6620	0,6651	0,6682	0,6713
0,75	0,6745	0,6776	0,6808	0,6840	0,6871	0,6903	0,6935	0,6967	0,6999	0,7031
0,76	0,7063	0,7095	0,7128	0,7160	0,7192	0,7225	0,7257	0,7290	0,7323	0,7356
0,77	0,7388	0,7421	0,7454	0,7488	0,7521	0,7554	0,7588	0,7621	0,7655	0,7688
0,78	0,7722	0,7756	0,7790	0,7824	0,7858	0,7892	0,7926	0,7961	0,7995	0,8030
0,79	0,8064	0,8099	0,8134	0,8169	0,8204	0,8239	0,8274	0,8310	0,8345	0,8381
0,80	0,8416	0,8452	0,8488	0,8524	0,8560	0,8596	0,8633	0,8669	0,8705	0,8742
0,81	0,8779	0,8816	0,8853	0,8890	0,8927	0,8965	0,9002	0,9040	0,9078	0,9116
0,82	0,9154	0,9192	0,9230	0,9269	0,9307	0,9346	0,9385	0,9424	0,9463	0,9502
0,83	0,9542	0,9581	0,9621	0,9661	0,9701	0,9741	0,9782	0,9822	0,9863	0,9904
0,84	0,9945	0,9986	1,0027	1,0069	1,0110	1,0152	1,0194	1,0237	1,0279	1,0322
0,85	1,0364	1,0407	1,0450	1,0494	1,0537	1,0581	1,0625	1,0669	1,0714	1,0758
0,86	1,0803	1,0848	1,0893	1,0939	1,0985	1,1031	1,1077	1,1123	1,1170	1,1217
0,87	1,1264	1,1311	1,1359	1,1407	1,1455	1,1503	1,1552	1,1601	1,1650	1,1700
0,88	1,1750	1,1800	1,1850	1,1901	1,1952	1,2004	1,2055	1,2107	1,2160	1,2212
0,89	1,2265	1,2319	1,2372	1,2426	1,2481	1,2536	1,2591	1,2646	1,2702	1,2759
0,90	1,2816	1,2873	1,2930	1,2988	1,3047	1,3106	1,3165	1,3225	1,3285	1,3346
0,91	1,3408	1,3469	1,3532	1,3595	1,3658	1,3722	1,3787	1,3852	1,3917	1,3984
0,92	1,4051	1,4118	1,4187	1,4255	1,4325	1,4395	1,4466	1,4538	1,4611	1,4684
0,93	1,4758	1,4833	1,4909	1,4985	1,5063	1,5141	1,5220	1,5301	1,5382	1,5464
0,94	1,5548	1,5632	1,5718	1,5805	1,5893	1,5982	1,6072	1,6164	1,6258	1,6352
0,95	1,6449	1,6546	1,6646	1,6747	1,6849	1,6954	1,7060	1,7169	1,7279	1,7392
0,96	1,7507	1,7624	1,7744	1,7866	1,7991	1,8119	1,8250	1,8384	1,8522	1,8663
0,97	1,8808	1,8957	1,9110	1,9268	1,9431	1,9600	1,9774	1,9954	2,0141	2,0335
0,98	2,0537	2,0749	2,0969	2,1201	2,1444	2,1701	2,1973	2,2262	2,2571	2,2904
0,99	2,3263	2,3656	2,4089	2,4573	2,5121	2,5758	2,6521	2,7478	2,8782	3,0902

S.14.2 Prozentpunkte der *t*-Verteilung mit *df* Freiheitsgraden

df	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
1	3,0777	6,3138	12,706	31,820	63,657
2	1,8856	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248
3	1,6377	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409
4	1,5332	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041
5	1,4759	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321
6	1,4398	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074
7	1,4149	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995
8	1,3968	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554
9	1,3830	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498
10	1,3722	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693
11	1,3634	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058
12	1,3562	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545
13	1,3502	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123
14	1,3450	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768
15	1,3406	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467
16	1,3368	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208
17	1,3334	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982
18	1,3304	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784
19	1,3277	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609
20	1,3253	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453
21	1,3232	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314
22	1,3212	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188
23	1,3195	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073
24	1,3178	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969
25	1,3163	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874
26	1,3150	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787
27	1,3137	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707
28	1,3125	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633
29	1,3114	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564
30	1,3104	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500
>30	1,2816	1,6445	1,9600	2,3263	2,5758

Für $df > 30$ gilt die Approximation durch die Standardnormalverteilung.

S.14.3 Oberer 5%-Punkt χ^2-Verteilung

Ablesebeispiel:

$P_{df=8}(\chi^2 > z) = 0{,}05 \Rightarrow z = 15{,}507$

df	z	df	z	df	z	df	z
1	3,841	11	19,675	21	32,671	31	44,985
2	5,991	12	21,026	22	33,924	32	46,194
3	7,815	13	22,362	23	35,172	33	47,400
4	9,488	14	23,685	24	36,415	34	48,602
5	11,070	15	24,996	25	37,652	35	49,802
6	12,592	16	26,296	26	38,885	36	50,998
7	14,067	17	27,587	27	40,113	37	52,192
8	15,507	18	28,869	28	41,337	38	53,384
9	16,919	19	30,144	29	42,557	39	54,572
10	18,307	20	31,410	30	43,773	40	55,758

df	z	df	z	df	z	df	z
41	56,942	51	68,669	61	80,232	71	91,670
42	58,124	52	69,832	62	81,381	72	92,808
43	59,304	53	70,993	63	82,529	73	93,945
44	60,481	54	72,153	64	83,675	74	95,081
45	61,656	55	73,311	65	84,821	75	96,217
46	62,830	56	74,468	66	85,965	76	97,351
47	64,001	57	75,624	67	87,108	77	98,484
48	65,171	58	76,778	68	88,250	78	99,617
49	66,339	59	77,931	69	89,391	79	100,749
50	67,505	60	79,082	70	90,531	80	101,879

Für $df \geq 80$ ergeben sich die oberen 5%-Punkte z der χ^2-Verteilung näherungsweise mit der Wilson-Hilferty-Approximation (vgl. Schlittgen [2008]) wie folgt:

$$z \approx df \cdot \left(1 - \frac{2}{9 \cdot df} + 1{,}6449 \cdot \sqrt{\frac{2}{9 \cdot df}}\right)^3$$