Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenwissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Vorschüssige Verzinsung

Aufgabe 3.1
Ein Kapital von 10 000 € wird fünfzehn Jahre lang bei vorschüssiger Verzinsung angelegt. Für das erste Jahr werden 2 %, für das zweite, dritte und vierte Jahr 3 % und ab dem fünften Jahr 4 % vorschüssige Zinsen berechnet.

a) Welcher Endwert ergibt sich am Ende des fünfzehnten Jahres?

b) Zu welchem gleich bleibenden vorschüssigen Jahreszins wäre der gleiche Endwert wie unter a) erreicht worden?

Aufgabe 3.2
Ein Kapital von 8 000 € wird fünfzehn Jahre lang zu 3,1 % pro Jahr vorschüssig mit Zinseszinsen verzinst.

a) Welcher Endwert ergibt sich am Ende des fünfzehnten Jahres?

b) Welcher Jahreszins wäre nötig, um bei fünfzehnjähriger nachschüssiger Verzinsung denselben Endwert wie unter a) zu erhalten?

Aufgabe 3.3
Ein Kapital von 20 000 € ist bei vorschüssiger Verzinsung zu 2,1% pro anno auf 28 087,10 € angewachsen. Wie hoch ist die Laufzeit gewesen?

Aufgabe 3.4
Ein Unternehmen bekommt von seiner Hausbank das folgende Angebot für eine Geldanlage:

Anlagevolumen: 100 000 €
Verzinsung: jährlich vorschüssige Verzinsung mit Zinseszins
Die Auszahlung des Anlagebetrages inklusive Zinsen erfolgt nach zwanzig Jahren.

Zinskonditionen:	1. und 2. Jahr:	2% p.a.
	3. bis 7. Jahr:	3% p.a.
	8. bis 20. Jahr:	4% p.a.

a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen am Ende des zwanzigsten Jahres von seiner Hausbank ausgezahlt bekommt?

b) Am Ende welchen Jahres übersteigt bei diesem Angebot das Guthaben des Unternehmens erstmalig den Betrag von 150 000 Euro?

c) Wie hoch ist der Effektivzins, d.h. welcher gleichbleibende Zinssatz führt nach zwanzig Jahren bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung zum gleichen Betrag wie in a) ?

Lösung zu Aufgabe 3.1

a) $K_{15} = \dfrac{K_0}{(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}03)^3\cdot(1-0{,}04)^{11}} = 17\,517{,}62$
d.h. der Endwert beträgt 17 517,62 €

b)
$$\begin{aligned}
17\,517{,}62 &= \frac{10\,000}{(1-i)^{15}}\\
(1-i)^{15} &= \frac{10\,000}{17\,517{,}62}\\
(1-i)^{15} &= 0{,}5708538\\
1-i &= \sqrt[15]{0{,}5708538}\\
1-i &= 0{,}963315\\
i &= 0{,}03668499
\end{aligned}$$
d.h. der gleich bleibende vorschüssige Jahreszins beträgt 3,668499 . . . %

Lösung zu Aufgabe 3.2
Ersatzzins: $i' = \dfrac{0{,}031}{0{,}969} = 0{,}03199174$

a) *1. Lösungsweg*:
$K_{15} = \dfrac{8\,000}{0{,}969^{15}} = 12\,830{,}20$
2. Lösungsweg:
$K_{15} = 8\,000 \cdot 1{,}03199174^{15} = 12\,830{,}20$
d.h. der Endwert beträgt 12 830,20 €

b) Der Ersatzzins beträgt 3,199174%

Lösung zu Aufgabe 3.3
1. Lösungsweg:
Ersatzzinssatz $i' = \dfrac{0{,}021}{1-0{,}021} = 0{,}02145046$
Laufzeit $n = \dfrac{\ln 28\,087{,}10 - \ln 20\,000}{\ln 1{,}02145046} = 16$
d.h. die Laufzeit betrug sechzehn Jahre.

2. Lösungsweg:
$$\begin{aligned}
28\,087{,}10 &= \frac{20\,000}{0{,}979^n} && \mid \cdot 0{,}979^n\\
28\,087{,}10\cdot 0{,}979^n &= 20\,000 && \mid \div 28\,087{,}10\\
0{,}979^n &= 0{,}7120681 && \mid \text{Definition des Logarithmus}\\
n &= \log_{0{,}979} 0{,}7120681 && \mid \text{Umrechnungsformel}\\
n &= \frac{\ln 0{,}7120681}{\ln 0{,}979} = 16
\end{aligned}$$

d.h. nach sechzehn Jahren.

Lösung zu Aufgabe 3.4:

a) $K_2 = \dfrac{100\,000}{0{,}98^2} = 104\,123{,}28$

$K_7 = \dfrac{104\,123{,}28}{0{,}97^5} = 121\,252{,}07$

$K_{20} = \dfrac{121\,252{,}07}{0{,}96^{13}} = 206\,140{,}42$

d.h. der Betrag liegt bei 206 140,42 Euro.

2. Lösungsweg:

$K_{20} = \dfrac{100\,000}{0{,}98^2 \cdot 0{,}97^5 \cdot 0{,}96^{13}} = 206\,140{,}42$

b) *1. Lösungsweg:*

nachschüssiger Ersatzzins $i' = \dfrac{i}{1-i} = \dfrac{0{,}04}{0{,}96} = 0{,}041\overline{6}$

$n = \dfrac{\ln\left(\frac{150\,000}{121\,252{,}07}\right)}{\ln 1{,}041\overline{6}} = 5{,}211987 \Rightarrow 7 + 5{,}2 = 12{,}2$

d.h. nach dreizehn Jahren.

2. Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
150\,000 &= \frac{121\,252{,}07}{0{,}96^n} && \mid \cdot 0{,}96^n \\
150\,000 \cdot 0{,}96^n &= 121\,252{,}07 && \mid \div 150\,000 \\
0{,}96^n &= 0{,}8083471 && \mid \text{ Definition des Logarithmus} \\
n &= \log_{0{,}96} 0{,}8083471 && \mid \text{ Umrechnungsformel} \\
n &= \frac{\ln 0{,}8083471}{\ln 0{,}96} = 5{,}211987 \Rightarrow 7 + 5{,}2 = 12{,}2
\end{aligned}$$

d.h. nach dreizehn Jahren.

c) $q = \sqrt[20]{\dfrac{206\,140{,}42}{100\,000}} = 1{,}036831$

d.h. der gesuchte Zins beträgt etwa 3,6831%.