Fachhochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@fh-koeln.de

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Annuitätentilgung

Aufgabe 11.1
Jemand hat ein Darlehn in Höhe von 200 000 € zu 8% Jahreszins aufgenommen. Geben Sie jeweils die Tilgungsplanzeile (Zinsen, Tilgungsbetrag, Annuität, Restschuld am Ende des Jahres) für die ersten beiden Jahre an bei

a) Ratentilgung über zehn Jahre.

b) Annuitätentilgung über zehn Jahre.

c) Prozentannuitätentilgung mit einer anfänglichen Tilgung von 5%.

Aufgabe 11.2
Ein Schuldkapital in Höhe von 12 000 € soll bei einem Jahreszins von 6% durch jährlich gleich hohe Beträge von 3 400 € zurückgezahlt werden. Die Rückzahlung beginnt ein Jahr nach Kapitalaufnahme.

a) Wie oft müssen die vollen Beträge von 3 400 € gezahlt werden?

b) Berechnen Sie die Restschuld sofort nach Zahlung der letzten vollen Annuität.

c) Berechnen Sie die Restschuld ein Jahr nach Zahlung der letzten vollen Annuität.

Aufgabe 11.3
Eine Familie hat bei 6% Jahreszinsen für einen Hauskauf ein Darlehn über 150 000 € aufgenommen. Diese Darlehn soll anhand von Prozentannuitäten mit einer anfänglichen Tilgung von 1,2% zurückgezahlt werden. Ferner sind die ersten beiden Jahre tilgungsfrei (d.h. lediglich die Zinsen werden gezahlt). Geben Sie den Tilgungsplan (Zinsen, Tilgungsbetrag, Annuität, Restschuld am Ende des Jahres) für das zweite Jahr und das fünfte Jahr an.

Aufgabe 11.4

Kredit: 150 000 GE

Zins: 5%

Tilgungsart: Prozentannuitätentilgung

Laufzeit: 33 Jahre, davon die ersten beiden Jahre tilgungsfrei

a) Wie hoch ist der anfängliche Tilgungssatz? (*Lösung: 1,41%*)

b) Nach wie vielen Jahren betragen die Schulden erstmals weniger als 100 000 GE?

Aufgabe 11.5
Bei 5% Jahreszinsen wurde eine Schuld über 20 000 € aufgenommen. Die Rückzahlung erfolgt über Prozentannuitätentilgung, wobei die ersten drei Jahre tilgungsfrei sind, d.h. in den ersten drei Jahren werden lediglich die anfallenden Zinsen bezahlt. Die Prozentannuität beträgt 9% der aufgenommenen Schuld.

a) Wie lange sind volle Annuitäten zu zahlen?

b) Wie hoch ist die Restschuld ein Jahr nach der letzten vollen Annuität?

c) Berechnen Sie die Tilgungsplanzeile für das 13. Jahr.

d) Wie hoch sind anstelle der Prozentannuität vorschüssige Quartalsraten?

Lösung zu Aufgabe 11.1

a) Ratentilgung über zehn Jahre

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	16 000	20 000	36 000	180 000
2	14 400	20 000	34 400	160 000

b) Annuitätentilgung über zehn Jahre

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	16 000	13 805,90	29 805,90	186 194,10
2	14 895,53	14 910,37	29 805,90	171 283,73

c) Prozentannuitätentilgung mit einer anfänglichen Tilgung von 5%

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
1	16 000	10 000	26 000	190 000
2	15 200	10 800	26 000	179 200

Lösung zu Aufgabe 11.2:

a) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{12\,000}{3\,400} \cdot 0{,}06\right]}{\ln 1{,}06} = 4{,}08$

d.h. vier Jahre lang volle Annuitäten.

b) $K_4 = 12\,000 \cdot 1{,}06^4 - 3\,400 \cdot \dfrac{1{,}06^4 - 1}{0{,}06} = 276{,}03$

d.h die Restschuld beträgt 276,03 €.

c) $276{,}03 \cdot 1{,}06 = 292{,}59$

d.h. die Zahlung beträgt 292,59 €.

Lösung zu Aufgabe 11.3:

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
2	9 000	–	9 000	150 000
5	8 777,52	2 022,48	10 800	144 269,52

Lösung zu Aufgabe 11.4:

a) $A = 150\,000 \cdot 1{,}05^{31} \cdot \dfrac{0{,}05}{1{,}05^{31} - 1} = 9\,619{,}\overline{81}$

$A = (0{,}05 + t) \cdot 150\,000$

$9{,}619{,}\overline{81} = (0{,}05 + t) \cdot 150\,000 \Leftrightarrow t = 0{,}0141$

b) *1. Lösungsweg:*

$$\begin{aligned}
100\,000 &= 150\,000 \cdot 1{,}05^k - 9\,619{,}818 \cdot \frac{1{,}05^k - 1}{0{,}05} && \mid \cdot 0{,}05 \\
5\,000 &= 7\,500 \cdot 1{,}05^k - 9\,619{,}818 \cdot 1{,}05^k + 9\,619{,}818 \\
-4\,619{,}818 &= -2\,119{,}818 \cdot 1{,}05^k && \mid \div(-2\,119{,}818) \\
2{,}1793 &= 1{,}05^k \\
k &= \frac{\ln 2{,}1793}{\ln 1{,}05} = 15{,}97
\end{aligned}$$

d.h. nach 16 Tilgungsjahren

d.h. nach 16 + 2 = 18 Jahren

2. Lösungsweg:

$$n = -\frac{\ln\left[1 - \frac{100\,000}{9\,619{,}81} \cdot 0{,}05\right]}{\ln 1{,}05} = 15{,}03$$

$31 - 15{,}03 = 15{,}97$

Lösung zu Aufgabe 11.5:

$A = K_0 \cdot 0{,}09 = 1\,800$

a) $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{20\,000}{1\,800} \cdot 0{,}05\right]}{\ln 1{,}05} = 16{,}6$

d.h. es sind sechzehn volle Annuitäten zu zahlen.

b) $K_{16} = 20\,000 \cdot 1{,}05^{16} - 1\,800 \cdot \dfrac{1{,}05^{16} - 1}{0{,}05} = 1\,074{,}01$

$K_{16} \cdot 1{,}05 = 1\,127{,}71$

d.h. die Restschuld beträgt 1 127,71 €.

c) $K_9 = 20\,000 \cdot 1{,}05^9 - 1\,800 \cdot \dfrac{1{,}05^9 - 1}{0{,}05} = 11\,178{,}75$

$Z_{10} = K_9 \cdot i = 558{,}94$

$T_{10} = A - Z_{10} = 1\,241{,}06$

$K_{10} = K_9 - T_{10} = 9\,937{,}69$

Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld
13	558,94	1 241,06	1 800	9 937,69

d) $1\,800 = r_{Q'}(4 + 2{,}5 \cdot 0{,}05) = 4{,}125 r_{Q'}$

$r_{Q'} = 436{,}36$

d.h. die Quartalsraten betragen 436,36 €.