Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung QM III

Gauß-Test

Aufgabe 14.1
Bekommen Mütter heutzutage später ihr erstes Kind als ihre eigene Mutter? Um diese Frage zu beantworten, wurden 102 Mütter, die gerade ihr erstes Kind bekommen hatten, befragt. Es ergaben sich folgende arithmetischen Mittel:

Alter (in Jahren)	
Befragte	Mutter der Befragten
29,6	25,2

Nehmen Sie an, dass die Differenz „Alter der Tochter minus Alter ihrer Mutter“ (gemessen in Jahren) normalverteilt ist mit der Standardabweichung $\sigma = 3{,}4$ Jahre.

a) Prüfen Sie mit einem Test zum Niveau $\alpha = 0{,}05$, ob es signifikante Unterschiede des mittleren Alters von Töchtern und ihren Müttern bei der Geburt ihres jeweils ersten Kindes gibt.

b) Falls Sie unter a) einen signifikanten Unterschied aufgedeckt haben, so prüfen Sie mit einem einseitigen Test zum Niveau $\alpha = 0{,}05$, welche der beiden Gruppen Töchter oder Mütter im Mittel älter war bei der Geburt des ersten Kindes.

Lösung zu Aufgabe 14.1
Gauß-Test
X=Alter Tochter minus Alter ihrer Mutter (in Jahren) bei der Geburt des jeweils ersten Kindes
$X \sim \mathsf{NV}(\mu; \sigma = 3{,}4)$
$n = 102$ und $\overline{x} = 29{,}6 - 25{,}2 = 4{,}4$

a) Zweiseitiger Gauß-Test
   H_0: „Kein Unterschied zwischen den mittleren Alter von Töchtern und ihren Müttern bei der Geburt des jeweils 1. Kindes"; d.h. $E[X] = 0$
   H_1: „Es gibt Unterschiede"; d.h. $E[X] \neq 0$
   p-Wert Gauß-Test $= 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{4{,}4-0}{\frac{3{,}4}{\sqrt{102}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-13{,}06995) \approx 2 \cdot 0 = 0 \leq 0{,}05 = \alpha$
   d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. es gibt signifikante Unterschiede im mittleren Alter von Töchtern und ihren Müttern bei der Geburt ihres jeweils ersten Kindes.

b) Da in der Stichprobe das durchschnittliche Alter von Töchtern höher als das durchschnittliche Alter der Mütter, lautet das einseitige Testproblem:
   H_0: Nicht H_1; d.h. $E[X] \leq 0$
   H_1: Töchter bekommen im Mittel später das erste Kind als ihre Mütter; d.h. $E[X] > 0$
   p-Wert einseitiger Gauß-Test $\approx 0{,}5 \cdot 0 = 0 \leq 0{,}05 = \alpha$
   d.h. H_0 wird abgelehnt; d.h. Töchter bekommen im Mittel signifikant später ihr erstes Kind als ihre Mütter.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Arbeitsblatt zur Vorlesung QM III

Gauß-Test

Beispiel 1:
Beträgt die Wartezeit in einem Schnellrestaurant im Mittel 4,5 Minuten? Gehen Sie davon aus, dass die Wartezeit (in Minuten) normalverteilt ist mit der Standardabweichung acht Minuten. Überprüfen Sie die Hypothese mit einem Test zum Niveau 0,05. Eine Umfrage unter zwölf Kunden eines Schnellrestaurants ergab die folgenden Wartezeiten:

14,9	15,1	1,7	15,7	1,8	4,9
18,4	0,8	6,0	20,2	4,6	7,9

Beispiel 2:
Unterscheiden sich die Ausbildungsdauern zweier Partner im Mittel nicht? Gehen Sie davon aus, dass die Differenz $X =$ „Ausbildungsdauer einer Frau minus Ausbildungsdauer ihres Mannes“ (gemessen in Jahren) normalverteilt ist mit der Standardabweichung 2,6 Jahre. Überprüfen Sie die Hypothese mit einem Test zum Niveau 0,05. Eine Umfrage unter 2 441 Paaren in den USA ergab, dass die Ausbildungsdauer von Frauen im Durchschnitt 13,2605 Jahre und die ihrer Partner im Durchschnitt 12,6317 Jahre betrug.

Beispiel 3:
Gibt es Unterschiede in den mittleren Auslieferungszeiten für eine Pizza eines lokalen Restaurants und einer Pizza-Kette? Nehmen Sie an, dass die Differenz $X=$„Auslieferungszeit (in Minuten) des Restaurants minus Auslieferungszeit (in Minuten) der Pizza-Kette“ normalverteilt ist mit der Standardabweichung 2,264 Minuten. Als Stichprobe bestellten zehn Kunden zeitgleich sowohl beidem Restauarnt als auch bei der Kette eine Pizza. Es ergaben sich folgende Auslieferungszeiten (in Minuten):

Restaurant	Kette
16,8	22,0
11,7	15,2
15,6	18,7
16,7	15,6
17,5	20,8
18,1	19,5
14,1	17,0
21,8	19,5
13,9	16,5
20,8	24,0

Lösung zu Beispiel 1

X = Wartezeit (in Minuten)

$X \sim \mathsf{N}(\mu; \sigma = 8)$

$\overline{x} = \frac{1}{12}[14{,}9 + \ldots + 7{,}9] = \frac{112}{12} = 9{,}\overline{3}$

a) zweiseitiger Gaußtest

$H_0 : E[X] = 4{,}5$ versus $H_1 : E[X] \neq 4{,}5$

Fehler 1. Art: Der Test erkennt nicht, dass die Wartezeit eines Kunden (w,m,d) im Mittel 4,5 Minuten beträgt.

Fehler 2. Art: Der Test erkennt nicht, dass die Wartezeit eines Kunden (w,m,d) im Mittel länger oder sogar kürzer als 4,5 Minuten ist.

p-Wert $= 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{-9{,}\overline{3} - 4{,}5}{\frac{8}{\sqrt{12}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-2{,}0929) = 2 \cdot 0{,}018 = 0{,}036 \leq 0{,}05 = \alpha$

d.h. Ablehnung von H_0

d.h. die mittlere Wartezeit eines Kunden (w,m,d) unterscheidet sich signifikant von 4,5 Minuten.

b) einseitiger Gaußtest

$\overline{x} = 9{,}\overline{3} > 4{,}5 = \mu_0$

$H_0 : E[X] \leq 4{,}5$ versus $H_1 : E[X] > 4{,}5$

Fehler 1. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Wartezeit eines Kunden (w,m,d) gleich lang oder sogar kürzer ist als 4,5 Minuten. Oder: Der Test behauptet fälschlicherweise, die mittlere Wartezeit eines Kunden (w,m,d) sei länger als 4,5 Minuten.

Fehler 2. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Wartezeit eines Kunden länger ist als 4,5 Minuten. Oder: Der Test behauptet fälschlicherweise, die mittlere Wartezeit eines Kunden (w,m,d) sei gleich lang oder sogar kürzer als 4,5 Minuten.

p-Wert (einseitig) $= 0{,}5 \cdot 0{,}036 = 0{,}018 \leq 0{,}05 = \alpha$

d.h. Ablehnung von H_0

d.h. die mittlere Wartezeit eines Kunden ist signifikant länger als 4,5 Minuten.

Lösung zu Beispiel 2

X = „Ausbildungsdauer einer Frau minus Ausbildungsdauer ihres Mannes“ (gemessen in Jahren)

$X \sim \mathsf{N}(\mu; \sigma = 2{,}6)$

$\overline{x} = 13{,}2605 - 12{,}6317 = 0{,}6288$

a) zweiseitiger Gaußtest

$H_0 : E[X] = 0$ versus $H_1 : E[X] \neq 0$

Fehler 1. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Auslieferungsdauer einer

Frau und die mittlere Ausbildungsdauer ihres Partners gleich lang sind.

Fehler 2. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Auslieferungsdauer einer Frau und die mittlere Ausbildungsdauer ihres Partners unterschiedlich lang sind.

p-Wert $= 2 \cdot F_U\left(-\left|\frac{0{,}6288 - 0}{\frac{2{,}6}{\sqrt{2\,441}}}\right|\right) = 2 \cdot F_U(-11{,}9487) \approx 2 \cdot 0 = 0 \leq 0{,}05 = \alpha$

d.h. Ablehnung von H_0

d.h. die mittlere Auslieferungsdauer einer Frau und die mittlere Ausbildungsdauer ihres Partners unterscheiden sich signifikant.

b) einseitiger Gaußtest

$\overline{x} = 0{,}6288 > 0 = \mu_0$

$H_0 : E[X] \leq 0$ versus $H_1 : E[X] > 0$

Fehler 1. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Auslieferungsdauer einer Frau gleich lang oder sogar kürzer ist als die mittlere Ausbildungsdauer ihres Partners. Oder: Der Test behauptet fälschlicherweise, die mittlere Ausdauer einer Frau sei länger als die mittlere Ausbildungsdauer ihres Partners.

Fehler 2. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Ausbildungsdauer einer Frau länger ist als die mittlere Ausbildungsdauer ihres Partners. Oder: Der Test behauptet fälschlicherweise, die mittlere Ausbildungsdauer einer Frau sei gleich lang oder sogar kürzer als die mittlere Ausbildungsdauer ihres Partners.

p-Wert (einseitig) $\approx 0{,}5 \cdot 0 = 0 \leq 0{,}05 = \alpha$

d.h. Ablehnung von H_0

d.h. die mittlere Ausbildungsdauer einer Frau ist signifikant länger als die mittlere Ausbildungsdauer ihres Partners.

Lösung zu Beispiel 3

X=„Auslieferungszeit (in Minuten) des Restaurants minus Auslieferungszeit (in Minuten) der Pizza-Kette“

$X \sim \mathsf{N}(\mu; \sigma = 2{,}264)$

Restaurant	Kette
16,8	22,0
11,7	15,2
15,6	18,7
16,7	15,6
17,5	20,8
18,1	19,5
14,1	17,0
21,8	19,5
13,9	16,5
20,8	24,0
$\sum = 167$	$\sum = 188{,}8$

$\overline{x} = \dfrac{167}{10} - \dfrac{188{,}8}{10} = -2{,}18$

a) zweiseitiger Gaußtest

$H_0 : E[X] = 0$ versus $H_1 : E[X] \neq 0$

Fehler 1. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Auslieferungszeit eines lokalen Restaurants und die mittlere Auslieferungszeit einer Pizza-Kette gleich lang sind.

Fehler 2. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Auslieferungszeit eines lokalen Restaurants und die mittlere Auslieferungszeit einer Pizza-Kette unterschiedlich lang sind.

p-Wert $= 2 \cdot F_U \left(- \left| \dfrac{-2{,}18 - 0}{\frac{2{,}264}{\sqrt{10}}} \right| \right) = 2 \cdot F_U(-3{,}0445) = 2 \cdot 0{,}001 = 0{,}002 \leq 0{,}05 = \alpha$

d.h. Ablehnung von H_0

d.h. die mittlere Auslieferungszeit eines lokalen Restaurants und die mittlere Auslieferungszeit einer Pizza-Kette unterscheiden sich signifikant.

b) einseitiger Gaußtest

$\overline{x} = -2{,}18 < 0 = \mu_0$

$H_0 : E[X] \geq 0$ versus $H_1 : E[X] < 0$

Fehler 1. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Auslieferungszeit eines lokalen Restaurants gleich lang oder sogar länger ist als die mittlere Auslieferungszeit einer Pizza-Kette. Oder: Der Test behauptet fälschlicherweise, die mittlere Auslieferungszeit eines lokalen Restaurants sei kürzer als die die mittlere Auslieferungszeit einer Pizza-Kette.

Fehler 2. Art: Der Test erkennt nicht, dass die mittlere Auslieferungszeit eines lokalen Restaurants kürzer ist als die mittlere Auslieferungszeit einer Pizza-Kette. Oder: Der Test behauptet fälschlicherweise, die mittlere Auslieferungszeit eines lokalen Restaurants sei gleich lang oder sogar länger als die mittlere Auslieferungszeit einer Pizza-Kette.

p-Wert (einseitig) $= 0{,}5 \cdot 0{,}002 = 0{,}001 \leq 0{,}05 = \alpha$

d.h. Ablehnung von H_0

d.h. die mittlere Auslieferungszeit eines lokalen Restaurants ist signifikant kürzer als die mittlere Auslieferungszeit einer Pizza-Kette.