Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zu QM III
Mindeststichprobenumfang

Aufgabe 12.1
Sie arbeiten bei Lufthansa und haben folgende Aufgabe zu erledigen: Geschätzt werden soll der Anteil der Flugreisenden, die mit Lufthansa durchschnittlich dreimal oder öfter in einem Monat fliegen.

a) Wie groß muss die hierzu benötigte Stichprobe mindestens sein, wenn Folgendes bekannt ist:

1. Der Vorstand lässt Sie wissen, dass für ihn ein Ergebnis mit einer maximalen Abweichung vom wahren Wert um vier Prozentpunkte nach unten und oben akzeptabel ist.
2. Sie wollen zu 95% sicher sein, dass Ihre Schätzung mittels Stichprobe den wahren Anteil in der Grundgesamtheit plus/minus 0.04 trifft.
3. Ein Kollege teilt Ihnen mit, dass in einer ähnlichen Studie, die vor zwei Jahren durchgeführt wurde, 30% aller Befragten angaben, dreimal oder öfter im vergangenen Monat mit Lufthansa geflogen zu sein.

b) Von 750 Befragten gaben 248 an, im Schnitt mehr als zweimal im Monat mit Lufthansa zu fliegen. Welchen Wert hat das approximative 0.95-Konfidenzintervall?

Aufgabe 12.2
Sie wollen anhand eines 0,90-Konfidenzintervalls Aufschluss erhalten über die im Mittel aufgebrachte wöchentliche Arbeitszeit μ (in Stunden) eines Studierenden an der FH Köln in der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften.

a) Wie viele Studierende müssen Sie mindestens befragen, damit das 0,90-Konfidenzintervall die Breite sechs Stunden hat? (In einer früheren ähnlichen Untersuchung betrug die Standardabweichung in der Stichprobe $s_x = 12$ Stunden.)

b) Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 50$ ergaben folgende Daten:

43	32	25	28	42	36	24	37	30	30
32	24	35	41	35	43	34	24	44	30
24	34	27	32	32	44	24	25	28	36
24	36	35	40	26	32	30	25	43	42
31	24	43	30	24	42	23	24	22	29

Berechnen Sie anhand dieser Daten ein 0,90-Konfidenzintervall für μ und interpretieren Sie anschließend den erhaltenen Wert.

Aufgabe 12.3
Ein Marktforschungsinstitut möchte den Bekanntheitsgrad in der Bevölkerung des Produkts „Wakeboard“ und des Produkts „Wakeskate“ schätzen.

a) Bei einer vorherigen Umfrage kannten 20% der Befragten das Produkt „Wakeboard“. Wie viele Personen sind jetzt zu befragen, damit mit der Wahrscheinlichkeit von 95% davon ausgegangen werden kann, dass die Abweichung vom wahren Anteilswert höchstens zwei Prozentpunkte beträgt?

b) Erfahrungsgemäß antworten bei Umfragen etwa 30% nicht. Wie groß ist dann der Stichprobenumfang unter a) zu wählen?

c) Bei der Umfrage mit dem Stichprobenumfang aus a) wurde auch der Anteil in der Bevölkerung erhoben, die das Produkt „Wakeskate“ kennen. Dieser Anteil betrug 6%. Wie groß ist dann - wiederum mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% - die Abweichung vom wahren Anteilswert.

Lösung zu Aufgabe 12.1:

Viel-Flieger : Jemand, der im Schnitt dreimal oder öfter pro Monat mit der Lufthansa fliegt

$X_i = \begin{cases} 0; i - \text{te befragte Person ist kein Viel-Flieger} \\ 1; i - \text{te befragte Person ist Viel-Flieger} \end{cases}$

Gesucht: $P(X_i = 1) = p = ?$

$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$=Anzahl der Viel-Flieger unter den Befragten

$Y \sim \mathsf{B}(n; p)$

approximatives 0,95−Konfidenzintervall für p:

$[\widehat{p} - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}; \widehat{p} + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}]$

Länge des approximativen 0,95-KI für p:

Obergrenze − Untergrenze$=2 \cdot 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$

a) Information 1): Länge des KI = 0,08
 Information 2): Es soll ein 0,95-KI sein
 Information 3): $\widehat{p}_{\text{alt}} = 0{,}30$

 1. Lösungsweg:

 Mit der Formel S.12.2 für ein KI haben wir:

$$\begin{aligned} 0{,}08 &= 2 \cdot 1{,}96 \cdot \sqrt{\tfrac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{n}} = \tfrac{1{,}7964}{\sqrt{n}} \\ \sqrt{n} &= \tfrac{1{,}7964}{0{,}08} = 22{,}4546 \\ n &= 504{,}21 \\ n &= 505 \end{aligned}$$

 2. Lösungsweg Mit der Formel S.12.2 für den Mindeststichprobenumfang haben wir:

$$n \geq \frac{(1{,}96)^2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7}{0{,}04^2} = 504{,}21 \Rightarrow n = 505$$

 3. Lösungsweg:

 Wollen wir uns nicht auf den alten Wert $\widehat{p}_{\text{alt}} = 0{,}30$ verlassen, so haben wir mit der WorstCase-Formel für den Mindeststichprobenumfang:

$$n \geq \frac{(1{,}96)^2 \cdot 0{,}25}{0{,}04^2} = 600{,}25 \Rightarrow n = 601$$

b) Faustregel $n \geq 100$ ist erfüllt

 $\widehat{p} = \frac{248}{750} = 0{,}3307$

 $[\widehat{p} - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}; \widehat{p} + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}] =$

 $[0{,}3307 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3307 \cdot 0{,}6693}{750}}; 0{,}3307 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3307 \cdot 0{,}6693}{750}}] =$

 $[0{,}3307 - 0{,}0337; 0{,}3307 + 0{,}0337] = [0{,}2970; 0{,}3644]$

 d.h. die anhand der obigen Stichprobe berechnete Schätzung für den Bereich, in dem der wahre unbekannte Anteil p mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 liegt, ist das Intervall $[30\%; 36\%]$

Lösung zu Aufgabe 12.2:

a) $n \geq \dfrac{(1{,}6449)^2 \cdot (12)^2}{3^2} = 43{,}3$ d.h. $n = 44$

b) X = tatsächlich aufgebrachte wöchentliche Arbeitszeit eines Studierenden (in Std.)
Faustregel $n \geq 30$ ist erfüllt
$\overline{x} = 32$ und $s_x^2 = 47{,}04$ und $s_x = 6{,}8586$
0,90-Konfidenzintervall für μ:
$[\overline{x} - 1{,}6449 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}; \overline{x} + 1{,}6449 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}}] =$
$[32 - 1{,}6449 \cdot \frac{6{,}8586}{\sqrt{50}}; 32 + 1{,}6449 \cdot \frac{6{,}8586}{\sqrt{50}}] = [32 - 1{,}5955; 32 + 1{,}5955] = [30{,}4; 33{,}6]$
d.h. $[30; 34]$ ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem μ mit Wahrscheinlichkeit 0,90 liegt.

Lösung zu Aufgabe 12.3:

a) $\widehat{p}_{\text{alt}} = 0{,}2$
$\varepsilon = \pm 0{,}02$
$n \geq \dfrac{(1{,}96)^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{(0{,}02)^2} = 1\,536{,}6 \Rightarrow n = 1\,537$
d.h. es sind 1 537 Personen zu befragen

b)
$$\begin{aligned} 70\% &\ \widehat{=}\ 1\,537 \\ 100\% &\ \widehat{=}\ \frac{1\,537}{0{,}7} = 2\,196 \end{aligned}$$
d.h. es sind 2 196 Personen zu befragen

c) Faustregel $n \geq 100$ ist erfüllt
0,95-KI für p:
$[0{,}06 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{1\,537}}\ ;\ 0{,}06 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{1\,537}}] = [0{,}06 - 0{,}0119; 0{,}06 + 0{,}0119] \approx$
$0{,}06 \pm 0{,}012 = 6\%$-Punkte $\pm$ 1,2%-Punkte
d.h. die Abweichung beträgt etwa 1,2 Prozentpunkte.