

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Funktionen mehrerer Veränderlicher

Aufgabe 9.1

Gegeben sei die Produktionsfunktion einer Einproduktunternehmung mit

$$x(r_1, r_2, r_3) = \sqrt{r_1^2 + 4r_2^2 + 5r_3^2 + r_3(r_1 + r_2)}.$$

Um wie viel wächst die Produktionsmenge $x(r_1, r_2, r_3)$, wenn alle drei Produktionsfaktoren auf das 5-fache gesteigert werden?

Aufgabe 9.2

Bilden Sie die alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen folgender Funktionen:

$$f(x, y, z) = 4x^2 - 2xy + 5y + (z - x)^3$$

$$g(x_1, x_2) = 4x_1^3 x_2^2 - x_1^4 x_2^3$$

$$h(x, y) = 2e^{0,4x-2y}$$

$$k(x, y) = 2x^3 - \ln \frac{y}{x}$$

Aufgabe 9.3

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x_1^2 e^{2x_2} + x_2 \ln(x_3).$$

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen von f an der Stelle $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9.4

Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$x(r_1, r_2, r_3) = 5 r_1^{\frac{1}{4}} r_2^{\frac{1}{2}} r_3^{\frac{1}{4}}$$

wobei r_i die Einsatzmengen des i -ten Produktionsfaktors bezeichnen. Die Preise pro ME der Produktionsfaktoren betragen $q_1 = 3, q_2 = 6, q_3 = 3$ Geldeinheiten.

- Berechnen Sie für die Faktoreinsatzmengen $(r_1, r_2, r_3) = (1, 100, 1)$ bzw. $(10\,000, 1, 1)$ bzw. $(10, 10, 10)$ die ausgebrachte Menge x .
- Bestimmen Sie die Produktionskostenfunktion in Abhängigkeit von r_1, r_2, r_3 .
- Berechnen Sie die Produktionskosten für die Faktoreinsatzmengen aus a).

Aufgabe 9.5

Gegeben ist die Kostenfunktion:

$$K(x; y) = 20x + 10y + 2xy + 100 ; x, y \geq 0$$

Berechnen und interpretieren Sie die partiellen Elastizitäten an der Stelle $(x; y) = (5; 6)$.

Lösung zu Aufgabe 9.1

$$\begin{aligned}x(5r_1, 5r_2, 5r_3) &= \sqrt{(5r_1)^2 + 4(5r_2)^2 + 5(5r_3)^2 + 5r_3(5r_1 + 5r_2)} \\&= \sqrt{25r_1^2 + 100r_2^2 + 125r_3^2 + 25r_3(r_1 + r_2)} \\&= \sqrt{25} \cdot \sqrt{r_1^2 + 4r_2^2 + 5r_3^2 + r_3(r_1 + r_2)} \\&= 5 \cdot x(r_1, r_2, r_3)\end{aligned}$$

d.h. wird die Faktoreinsatzmenge verfünffacht, so verfünffacht sich auch die Ausbringungsmenge.

Zahlenbeispiel:

$$x(2, 1, 1) = 4 \text{ und bei 5-fachem Input: } x(10, 5, 5) = 20 = 5 \cdot 4$$

Lösung zu Aufgabe 9.2

$$\begin{aligned}f_x(x, y, z) &= 8x - 2y - 3(z - x)^2 \\f_y(x, y, z) &= -2x + 5 \\f_z(x, y, z) &= 3(z - x)^2 \\f_{xx}(x, y, z) &= 8 + 6(z - x) \\f_{yy}(x, y, z) &= 0 \\f_{zz}(x, y, z) &= 6(z - x) \\f_{xy}(x, y, z) &= -2 \\f_{xz}(x, y, z) &= -6(z - x) \\f_{yz}(x, y, z) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{x_1}(x_1, x_2) &= 12x_1^2x_2^2 - 4x_1^3x_2^3 \\g_{x_2}(x_1, x_2) &= 8x_1^3x_2 - 3x_1^4x_2^2 \\g_{x_1x_1}(x_1, x_2) &= 24x_1x_2^2 - 12x_1^2x_2^3 \\g_{x_2x_2}(x_1, x_2) &= 8x_1^3 - 6x_1^4x_2 \\g_{x_1x_2}(x_1, x_2) &= 24x_1^2x_2 - 12x_1^3x_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_x(x, y) &= 0,8e^{0,4x-2y} \\h_y(x, y) &= -4e^{0,4x-2y} \\h_{xx}(x, y) &= 0,32e^{0,4x-2y} \\h_{yy}(x, y) &= 8e^{0,4x-2y} \\h_{xy}(x, y) &= -1,6e^{0,4x-2y}\end{aligned}$$

$$k(x, y) = 2x^3 - \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 2x^3 - \ln(y) + \ln(x)$$

$$k_x(x, y) = 6x^2 + \frac{1}{x}$$

$$k_y(x, y) = -\frac{1}{y}$$

$$k_{xx}(x, y) = 12x - \frac{1}{x^2}$$

$$k_{yy}(x, y) = \frac{1}{y^2}$$

$$k_{xy}(x, y) = 0$$

Lösung zu Aufgabe 9.3

$$\begin{aligned}
f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 e^{2x_2} \\
f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1^2 e^{2x_2} + \ln(x_3) \\
f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_2}{x_3} \\
f_{x_1}(-1, 0, 1) &= -2 \\
f_{x_2}(-1, 0, 1) &= 2 \\
f_{x_3}(-1, 0, 1) &= 0
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 9.4

- a) $x(1, 100, 1) = 5 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1 = 50$
 $x(10\,000, 1, 1) = 5 \cdot \sqrt[4]{10\,000} \cdot 1 \cdot 1 = 50$
 $x(10, 10, 10) = 5 \cdot \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt[4]{10} = 5 \cdot 10^{1/4} \cdot 10^{1/2} \cdot 10^{1/4} = 5 \cdot 10 = 50$
d.h. die Ausbringungsmenge beträgt für alle drei Kombinationen jeweils 50 ME- (Isoquanten=Kurven gleichen Ertrags)

- b) Kosten

$$K(r_1, r_2, r_3) = 3r_1 + 6r_2 + 3r_3$$

c)

r	$\begin{pmatrix} 1 \\ 100 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10\,000 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$
$K(r)$	606	30\,009	120

d.h. insb. sind die Kosten bei gleichen Erträgen für die Kombination (10,10,10) am kleinsten.

Lösung zu Aufgabe 9.5

$$K_x(x; y) = 20 + 2y \text{ und } K_y(x; y) = 10 + 2x$$

$$\varepsilon_x(x; y) = (20 + 2y) \cdot \frac{x}{K(x; y)}$$

$$\varepsilon_x(5; 6) = 32 \cdot \frac{5}{320} = 0,5$$

d.h. werden statt $x = 5$ ME von Gut I und $y = 6$ ME von Gut II jetzt $x = 5,05$ ME von Gut I und $y = 6$ ME von Gut II hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 0,5 %.

$$\varepsilon_y(x; y) = (10 + 2x) \cdot \frac{y}{K(x; y)}$$

$$\varepsilon_y(5; 6) = 20 \cdot \frac{6}{320} = 0,375$$

d.h. werden statt $x = 5$ ME von Gut I und $y = 6$ ME von Gut II jetzt $x = 5$ ME von Gut I und $y = 6,06$ ME von Gut II hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 0,375 %.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen QM I (Wirtschaftsmathematik)

Partielle Ableitungen in Klausuren

Stand: 27.05.2019

- 30.01.2019 $L(x, y, \lambda) = x + 2y - 18 + \lambda(x^2 + y^2 - 125)$
- 26.09.2018 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y + z^3 - 12z - 2ay + 99 ; x, y, z \in \mathbb{R}$
- 26.09.2018 $L(x, y, \lambda) = \frac{5}{2}x^2 + 3xy - 66x + \frac{7}{2}y^2 + 12\frac{2}{5}y + 100 + \lambda(5x + 3y - 90)$
- 03.07.2018 $f(x, y) = -x^2 + y^2 + 6x - 8y + 666 ; x, y \in \mathbb{R}$
- 03.07.2018 $L(x, y, \lambda) = \frac{7}{2}x^2 - 3xy - 34x + 3y^2 - 42y + 1000 + \lambda(2x + y - 32) ; x, y, \in [0; 50]$
- 30.01.2018 $f(x, y) = 3x^2 + 16x - 5xy + 3y - 2y^2 + 5 ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 30.01.2018 $L(x, y, \lambda) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2y^2 - 9y - xy + 111 + \lambda(x + y - 10)$
- 27.09.2017 $L(x, y, \lambda) = 4x^2 + 5y^2 - 2xy + 200 + \lambda(x + 2y - 50) ; x, y, \lambda \in \mathbb{R}$
- 20.07.2017 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + xy + x + y - 17 ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 20.07.2017 $L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + xy + x + y - 17 + \lambda(x + y - 8) ; x, y, \lambda \in \mathbb{R}$
- 25.01.2017 $f(x, y) = (7x - 5y)^3 ; x, y \in \mathbb{R}$
- 25.01.2017 $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy - 3ax + \lambda(e^{x+y} - 1) ; x, y \in \mathbb{R}$
- 20.09.2016 $L(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 + 4x + 2y - 10 + \lambda(x + y - a) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 06.07.2016 $f(x, y) = x^2 + axy + y^2 (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 06.07.2016 $f(x, y) = e^{x^2+y^2} ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 03.02.2016 $L(x, y, \lambda) = 3x^2 + y^2 - 2xy - 100y + 233750 + \lambda(x + y - 1000) x, y \geq 0$
- 23.09.2015 $f(x, y) = x^2 \cdot y - 4y + 4x ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 23.09.2015 $f(x, y, z) = x^2 - x \cdot y + \frac{1}{2}y^2 + x - 4y + \ln(z^2 + 1) ; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- 01.07.2015 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}y^2 - 4y + 10 ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 01.07.2015 $f(x, y) = y \cdot e^x + 4x + 4y + 8 ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$

- 04.02.2015 $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy - 6y - 3 ; x, y \in \mathbb{R}$
- 04.02.2015 $L(x, y, \lambda) = 100 - x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy + \lambda(x + y - 10)$
- 29.09.2014 $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2y^2 + z^3 - 27z + 2x - 2ay + 100 ; x, y, z \in \mathbb{R}$
- 03.07.2014 $G(x, y) = -2x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 28y - 400 ; x, y \geq 0$
- 07.02.2014 $L(x, y, \lambda) = 8x + 24y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 22) ; x \neq 0, y \neq 0, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 26.09.2013 $L(x, y, \lambda) = 3 \ln(x) + 15 \ln(y) + \lambda(x + y - 120) ; x, y \in (0; \infty), \lambda \in \mathbb{R}$
- 03.07.2013 $U(x, y) = 300x - x^2 - xy + 900y - 4y^2 ; x, y \in [0; 150]$
- 03.07.2013 $r(x, y) = \sqrt{x} + y^2 ; x, y \in (0; \infty)$
- 31.01.2013 $L(x, y, \lambda) = x^3 + 2y^2 - xy + 100 + \lambda(x + y - 9)$
- 01.10.2012 $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - a \cdot x_3^2 - x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 ; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$
- 05.07.2012 $G(x_1, x_2) = -x_1^2 - a \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 1 ; x_1, x_2 \geq 0$
- 08.02.2012 $f(x, y) = -6x^2 + 6y^2 + 136x - 20xy + 100 ; x, y \in \mathbb{R}$
- 08.02.2012 $L(x, y; \lambda) = 4x + y - 10 + \lambda(2x^2 + y^2 - 36) ; x, y > 0$
- 05.10.2011 $f(x, y) = e^x + \ln(y^2 + 1) + 2x^2y ; x, y \in \mathbb{R}$
- 05.10.2011 $L(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + 7x + 9y - 10 + \lambda(x + y - 10) ; x, y, \in [0; 10]$
- 08.07.2011 $f(x, y) = y^2 - x^2 - 2y ; x, y, \in \mathbb{R}$
- 08.07.2011 $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + xy + x + y + 100 + \lambda(x + y - 10) ; x, y, \in \mathbb{R}$
- 02.02.2011 $K(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + xy + 100 ; x, y \geq 0$
- 02.02.2011 $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \ln(y) + \lambda(x + y - 1) ; x < -5, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$
- 27.09.2010 $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4y + \frac{1}{3}y^3 ; x, y \in \mathbb{R}$
- 06.07.2010 $L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}x^2 + 8y^2 - 24x - 32y + 400 + \lambda(3x - 12y) ; x, y \geq 0$
- 09.02.2010 $G(x, y) = -2x^3 - y^2 + 12xy - 700 ; x, y, \geq 7$
- 09.02.2010 $L(x, y, \lambda) = -0,25x^2 - 4y^2 + 12x + 16y - 10 + \lambda(2x - 8y) ; x, y \geq 0$
- 30.09.2009 $L(x, y, \lambda) = 20x + 39y - 2x^2 - 3y^2 + \lambda(4x + 6y - 24) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$
- 17.07.2009 $f(x, y) = x^3 + y^2 - 12xy + 23 ; x, y \in \mathbb{R}$

- 17.07.2009 $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_2 + 210 + \lambda(x_1 + x_2 - 100)$; $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$
- 09.02.2009 $G(x, y) = 12x + 54y - x^2 - 4y^2 + xy - 100$; $x, y \in [0; 50]$
- 15.07.2008 $G(x_1; x_2) = -x_1^3 - 12x_1^2 - x_2^2 - 4x_1x_2 + 90x_1 + 30x_2 - 10$; $x_1, x_2 \geq 0$
- 28.01.2008 $G(x; y) = -2x^2 - y^2 + 50x + 15y - xy - 50$; $x \in [0; 15], y \in [0; 20]$
- 28.01.2008 $L(x, y, \lambda) = -2x^2 - y^2 + 50x + 15y - xy - 50 + \lambda(2x - y)$
- 10.07.2007 $L(x_1, x_2, \lambda) = \sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} + \lambda(0,5x_1 + 4x_2 - 96)$; $x_1, x_2 > 0$
- 06.02.2007 $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 4)$
- 11.07.2006 $f(x; y) = x^3 - 12x - y^2 + 2y - 10$; $x, y \in \mathbb{R}$
- 19.04.2006 $f(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + 5xy - 14,6x$
- 02.02.2006 $f(x, y) = xy^4 + \ln(x^2 + 1) + \frac{x}{y}$
- 02.02.2006 $L(x, y, \lambda) = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 625)$
- 12.07.2005 $L(x, y, \lambda) = 10x + 22y + 527 + \lambda(x^2 + y^2 - 146)$
- 30.03.2005 $G(x, y) = 120x - x^2 + 70y - 0,5y^2 - 100$

Lösungen:

30.01.2019	$L_x(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda x$	$L_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$	
	$L_y(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda y$	$L_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda$	
	$L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 125$	$L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$	
30.09.2018	$f_x(x, y, z) = 2x + 2y$	$f_{xx}(x, y, z) = 2$	$f_{xy}(x, y, z) = 2$
	$f_y(x, y, z) = 4y + 2x - 2 - 2a$	$f_{yy}(x, y, z) = 4$	$f_{xz}(x, y, z) = 0$
	$f_z(x, y, z) = 3z^2 - 12$	$f_{zz}(x, y, z) = 6z$	$f_{yz}(x, y, z) = 0$
30.09.2018	I $0 = 5x + 3y - 66 + 5\lambda$		
	II $0 = 3x + 7y + 12\frac{2}{5} + 3\lambda$		
	III $0 = 5x + 3y - 90$		
03.07.2018	$f_x(x, y) = -2x + 6$	$f_{xx}(x, y) = -2$	
	$f_y(x, y) = 2y - 8$	$f_{yy}(x, y) = 2$	
		$f_{xy}(x, y) = 0$	
03.07.2018	$L_x(x, y, \lambda) = 7x - 3y - 34 + 2\lambda$	$L_{xx}(x, y, \lambda) = 7$	
	$L_y(x, y, \lambda) = -3x + 6y - 42 + \lambda$	$L_{yy}(x, y, \lambda) = 6$	
	$L_\lambda(x, y, \lambda) = 2x + y - 32$	$L_{xy}(x, y, \lambda) = -3$	
30.01.2018	$f_x(x, y) = 6x + 16 - 5y$	$f_{xx}(x, y) = 6$	
	$f_y(x, y) = -5x + 3 - 4y$	$f_{yy}(x, y) = -4$	
		$f_{xy}(x, y) = -5$	
30.01.2018	$L_x(x, y, \lambda) = 3x^2 + 6x + 5 - y + \lambda$	$L_{xx}(x, y, \lambda) = 6x + 6$	
	$L_y(x, y, \lambda) = 4y - 9 - x + \lambda$	$L_{yy}(x, y, \lambda) = 4$	
	$L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10$	$L_{xy}(x, y, \lambda) = -1$	
27.09.2017	$L_x(x, y, \lambda) = 8x - 2y + \lambda$	$L_{xx}(x, y, \lambda) = 8$	
	$L_y(x, y, \lambda) = 10y - 2x + 2\lambda$	$L_{yy}(x, y, \lambda) = 10$	
	$L_\lambda(x, y, \lambda) = x + 2y - 50$	$L_{xy}(x, y, \lambda) = -2$	
20.07.2017	$f_x(x, y) = 2x + y + 1$	$f_{xx}(x, y) = 2$	
	$f_y(x, y) = 4y + x + 1$	$f_{yy}(x, y) = 4$	
		$f_{xy}(x, y) = 1$	
03.07.2018	$L_x(x, y, \lambda) = 7x - 3y - 34 + 2\lambda$	$L_{xx}(x, y, \lambda) = 7$	
	$L_y(x, y, \lambda) = -3x + 6y - 42 + \lambda$	$L_{yy}(x, y, \lambda) = 6$	
	$L_\lambda(x, y, \lambda) = 2x + y - 32$	$L_{xy}(x, y, \lambda) = -3$	
20.07.2017	$L_x(x, y, \lambda) = 2x + y + 1 + \lambda$	$L_{xx}(x, y, \lambda) = 2$	
	$L_y(x, y, \lambda) = 4y + x + 1 + \lambda$	$L_{yy}(x, y, \lambda) = 4$	
	$L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 8$	$L_{xy}(x, y, \lambda) = 1$	

25.01.2017 $f_x(x, y) = 21(7x - 5y)^2$ $f_{xx}(x, y) = 294(7x - 5y)$
 $f_y(x, y) = -15(7x - 5y)^2$ $f_{yy}(x, y) = 150(7x - 5y)$
 $f_{xy}(x, y) = -210(7x - 5y)$

25.01.2017 $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy - 3ax + \lambda(e^{x+y} - 1)$
 $L_x(x, y, \lambda) = 2x - y - 3a + \lambda e^{x+y}$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2 + \lambda e^{x+y}$
 $L_y(x, y, \lambda) = 2y - x + \lambda e^{x+y}$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 2 + \lambda e^{x+y}$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = e^{x+y} - 1$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = -1 + \lambda e^{x+y}$

20.09.2016 $L_x(x, y, \lambda) = 2x + y + 4 + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2$
 $L_y(x, y, \lambda) = x + 2y + 2 + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 2$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - a$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 1$

06.07.2016 $f_x(x, y) = 2x + ay$ $f_{xx}(x, y) = 2$
 $f_y(x, y) = ax + 2y$ $f_{yy}(x, y) = 2$
 $f_{xy}(x, y) = a$

06.07.2016 $f_x(x, y) = 2x \cdot e^{x^2+y^2}$ $f_{xx}(x, y) = 2 \cdot e^{x^2+y^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}(2 + 4x^2)$
 $f_y(x, y) = 2y \cdot e^{x^2+y^2}$ $f_{yy}(x, y) = e^{x^2+y^2}(2 + 4y^2)$
 $f_{xy}(x, y) = 4xy \cdot e^{x^2+y^2}$

03.02.2016 $L_x(x, y, \lambda) = 6x - 2y + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 6$
 $L_y(x, y, \lambda) = 2y - 2x - 100 + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 2$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1000$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = -2$

23.09.2015 $f_x(x, y) = 2xy + 4$ $f_{xx}(x, y) = 2y$
 $f_y(x, y) = x^2 - 4$ $f_{yy}(x, y) = 0$
 $f_{xy}(x, y) = 2x$

23.09.2015 $f_x(x, y, z) = 2x - y + 1$
 $f_y(x, y, z) = -x + y - 4$
 $f_z(x, y, z) = \frac{2z}{z^2 + 1}$

01.07.2015 $f_x(x, y) = x^2 - 3x + 2$ $f_{xx}(x, y) = 2x - 3$
 $f_y(x, y) = y - 4$ $f_{yy}(x, y) = 1$
 $f_{xy}(x, y) = 0$

01.07.2015 $f_x(x, y) = y \cdot e^x + 4$ $f_{xx}(x, y) = y \cdot e^x$
 $f_y(x, y) = e^x + 4$ $f_{yy}(x, y) = 0$
 $f_{xy}(x, y) = e^x$

04.02.2015 $f_x(x, y) = 2x + 2y$ $f_{xx}(x, y) = 2$
 $f_y(x, y) = -2y + 2x - 6$ $f_{yy}(x, y) = -2$
 $f_{xy}(x, y) = 2$

- 04.02.2015 $L_x(x, y, \lambda) = -2x + y + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = -2$
 $L_y(x, y, \lambda) = -y + x + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = -1$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 1$
- 29.09.2014 $f_x(x, y, z) = 2x + 2y + 2$ $f_{xx}(x, y, z) = 2$ $f_{xy}(x, y, z) = 2$
 $f_y(x, y, z) = 2x + 4y - 2a$ $f_{yy}(x, y, z) = 4$ $f_{xz}(x, y, z) = 0$
 $f_z(x, y, z) = 3z^2 - 27$ $f_{zz}(x, y, z) = 6z$ $f_{yz}(x, y, z) = 0$
- 03.07.2014 $G_x(x, y) = -4x - 4y + 16$ $G_{xx}(x, y) = -4$
 $G_y(x, y) = -4x - 8y + 28$ $G_{yy}(x, y) = -8$
 $G_{xy}(x, y) = -4$
- 07.02.2014 $L_x(x, y, \lambda) = 8 + 2\lambda x$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$
 $L_y(x, y, \lambda) = 24 + 4\lambda y$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 4\lambda$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 22$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 26.09.2013 $L_x(x, y, \lambda) = \frac{3}{x} + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = -\frac{3}{x^2}$
 $L_y(x, y, \lambda) = \frac{15}{y} + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = -\frac{15}{y^2}$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 120$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 03.07.2013 $U_x(x, y) = 300 - 2x - y$ $U_{xx} = -2$
 $U_y(x, y) = -x + 900 - 8y$ $U_{yy} = -8$
 $U_{xy}(x, y) = -1$
- 03.07.2013 $r_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $r_y(x, y) = 2y$
- 31.01.2013 $L_x(x, y, \lambda) = 3x^2 - y + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 6x$
 $L_y(x, y, \lambda) = 4y - x + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 4$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 9$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = -1$
- 01.10.2012 $f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 - x_2$
 $f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2x_2 - x_1 + x_3$
 $f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = -2ax_3 + x_2$
 $f_{x_1x_1}(x_1, x_2, x_3) = -2$ $f_{x_1x_2}(x_1, x_2, x_3) = -1$
 $f_{x_2x_2}(x_1, x_2, x_3) = -2$ $f_{x_1x_3}(x_1, x_2, x_3) = 0$
 $f_{x_3x_3}(x_1, x_2, x_3) = -2a$ $f_{x_2x_3}(x_1, x_2, x_3) = 1$
- 05.07.2012 $G_{x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 - x_2 + 2$ $G_{x_1x_1}(x_1, x_2) = -2$
 $G_{x_2}(x_1, x_2) = -2ax_2 - x_1 + 3$ $G_{x_2x_2}(x_1, x_2) = -2a$
 $G_{x_1x_2}(x_1, x_2) = -1$
- 08.02.2012 $f_x(x, y) = -12x + 136 - 20y$ $f_{xx}(x, y) = -12$
 $f_y(x, y) = 12y - 20x$ $f_{yy} = 12$
 $f_{xy} = -20$

- 08.02.2012 $L_x(x, y, \lambda) = 4 + 4\lambda x$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 4\lambda$
 $L_y(x, y, \lambda) = 1 + 2\lambda y$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = 2x^2 + y^2 - 36$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 05.10.2011 $f_x(x, y) = e^x + 4xy$ $f_{xx}(x, y) = e^x + 4y$
 $f_y(x, y) = \frac{2y}{y^2 + 1} + 2x^2$ $f_{yy} = 2 \cdot \frac{1 - y^2}{(y^2 + 1)^2}$
 $f_{xy} = 4x$
- 05.10.2011 $L_x(x, y, \lambda) = -2x + 7 + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = -2$
 $L_y(x, y, \lambda) = -2y + 9 + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = -2$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 08.07.2011 $f_x(x, y) = -2x$ $f_{xx}(x, y) = -2$
 $f_y(x, y) = 2y - 2$ $f_{yy}(x, y) = 2$
 $f_{xy}(x, y) = 0$
- 08.07.2011 $L_x(x, y, \lambda) = 2x + y + 1 + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2$
 $L_y(x, y, \lambda) = 2y + x + 1 + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 2$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 10$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 1$
- 02.02.2011 $K_x(x, y) = 6x + y$ und $K_y(x, y) = 4y + x$
- 02.02.2011 $L_x(x, y, \lambda) = x + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 1$
 $L_y(x, y, \lambda) = -\frac{2}{y} + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = \frac{2}{y^2}$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 1$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 27.09.2010 $f_x(x, y) = x^2 + 4x$ $f_{xx}(x, y) = 2x + 4$
 $f_y(x, y) = -4 + y^2$ $f_{yy}(x, y) = 2y$
 $f_{xy}(x, y) = 0$
- 06.07.2010 $L_x(x, y, \lambda) = x - 24 + 3\lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 1$
 $L_y(x, y, \lambda) = 16y - 32 - 12\lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 16$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = 3x - 12y$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 09.02.2010 $G_x(x, y) = -6x^2 + 12y$ und $G_y(x, y) = -2y + 12x$
- 09.02.2010 $L_x(x, y, \lambda) = -0,5x + 12 + 2\lambda$ und $L_y(x, y, \lambda) = -8y + 16 - 8\lambda$ und $L_\lambda(x, y, \lambda) = 2x - 8y$
- 30.09.2009 $L_x(x, y, \lambda) = 20 - 4x + 4\lambda$ und $L_y(x, y, \lambda) = 39 - 6y + 6\lambda$ und $L_\lambda(x, y, \lambda) = 4x + 6y - 24$
- 17.07.2009 $f_x(x, y) = 3x^2 - 12y$ und $f_y(x, y) = 2y - 12x$
- 17.07.2009 $L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + \lambda$ und $L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 2x_2 - 8 + \lambda$ und $L_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 - 100$

- 09.02.2009 $G_x(x, y) = 12 - 2x + y$ $G_{xx}(x, y) = -2$
 $G_y(x, y) = 54 - 8y + x$ $G_{yy}(x, y) = -8$
 $G_{xy}(x, y) = 1$
- 15.07.2008 $G_{x_1}(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 24x_1 - 4x_2 + 90$ $G_{x_1x_1}(x_1, x_2) = -6x_1 - 24$
 $G_{x_2}(x_1, x_2) = -2x_2 - 4x_1 + 30$ $G_{x_2x_2}(x_1, x_2) = -2$
 $G_{x_1x_2}(x_1, x_2) = -4$
- 28.01.2008 $G_x(x, y) = -4x + 50 - y$ $G_{xx}(x, y) = -4$
 $G_y(x, y) = -2y + 15 - x$ $G_{yy}(x, y) = -2$
 $G_{xy}(x, y) = -1$
- 28.01.2008 $L_x(x, y, \lambda) = -4x + 50 - y + 2\lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = -4$
 $L_y(x, y, \lambda) = -2y + 15 - x - \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = -2$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = 2x - y$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = -1$
- 10.07.2007 $L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} + 0,5\lambda$ $L_{x_1x_1}(x_1, x_2, \lambda) = -\frac{1}{4\sqrt{x_1^3}}$
 $L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{x_2}} + 4\lambda$ $L_{x_2x_2}(x_1, x_2, \lambda) = -\frac{1}{2\sqrt{x_2^3}}$
 $L_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = 0,5x_1 + 4x_2 - 96$ $L_{x_1x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 0$
- 06.02.2007 $L_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda$ $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2$
 $L_y(x, y, \lambda) = 2y + \lambda$ $L_{yy}(x, y, \lambda) = 2$
 $L_\lambda(x, y, \lambda) = x + y - 4$ $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 11.07.2006 $f_x(x; y) = 3x^2 - 12$ und $f_y(x; y) = -2y + 2$
 $f_{xx}(x; y) = 6x$ und $f_{yy}(x; y) = -2$ und $f_{xy}(x; y) = 0$
- 19.04.2006 $f_x(x, y) = 6x + 5y - 14,6$ und $f_y(x, y) = -8y + 5x$
 $f_{xx}(x, y) = 6$ und $f_{yy}(x, y) = -8$ und $f_{xy}(x, y) = 5$
- 02.02.2006 $f_x(x, y) = y^4 + \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{y}$ und $f_y(x, y) = 4xy^3 - \frac{x}{y^2}$
- 02.02.2006 $L_x(x, y, \lambda) = 2(x - 3) + 2\lambda x$ und $L_y(x, y, \lambda) = 2(y - 4) + 2\lambda y$ und $L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 625$
 $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda$ und $L_{yy}(x, y, \lambda) = 2 + 2\lambda$ und $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 12.07.2005 $L_x(x, y, \lambda) = 10 + 2\lambda x$ und $L_y(x, y, \lambda) = 22 + 2\lambda y$ und $L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 146$
 $L_{xx}(x, y, \lambda) = 2\lambda$ und $L_{yy}(x, y, \lambda) = 2\lambda$ und $L_{xy}(x, y, \lambda) = 0$
- 30.03.2005 $G_x(x, y) = 120 - 2x$ und $G_y(x, y) = 70 - y$
 $G_{xx}(x, y) = -2$ und $G_{yy}(x, y) = -1$ und $G_{xy}(x, y) = 0$