

Technische Hochschule Köln  
 Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften  
 Prof. Dr. Arrenberg  
 Raum 221, Tel. 39 14  
 jutta.arrenberg@th-koeln.de

## Übungen zur Vorlesung QM 1 (Wirtschaftsmathematik)

### Vorkenntnisse

#### Aufgabe 0.1

Sei  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$  eine Menge von Tätigkeiten, die von einer Menge  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  von Angestellten zu erledigen sind. Mit der Wertetabelle

$a_i$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
$f_1(a_i)$	$b_1$		$b_2$	$b_3$		$b_4$
$f_2(a_i)$	$b_1, b_2$	$b_1$	$b_3$	$b_4$	$b_1$	$b_3$
$f_3(a_i)$	$b_4$	$b_4$	$b_4$	$b_4$	$b_4$	$b_4$
$f_4(a_i)$	$b_4$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_3$	$b_3$

werden Zuordnungsvorschriften  $f_1, f_2, f_3, f_4$  beschrieben. Welche der vier Zuordnungsvorschriften sind Abbildungen von  $A$  nach  $B$ ?

#### Aufgabe 0.2

Es seien  $p =$  Verkaufspreis (in Geldeinheiten) und  $x =$  abgesetzte Menge (in Mengeneinheiten) eines Produkts. Bestimmen Sie

- a) den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich
- b) den Wertebereich
- c) die Umkehrabbildung

der folgenden Preis-Absatz-Funktion  $x(p) = 160 - \frac{p}{4}$

#### Aufgabe 0.3

Es seien  $p =$  Verkaufspreis (in Geldeinheiten) und  $x =$  abgesetzte Menge (in Mengeneinheiten) eines Produkts. Bestimmen Sie

- a) den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich
- b) den Wertebereich
- c) die Umkehrabbildung

der folgenden Preis-Absatz-Funktion  $p(x) = 700 - \frac{1}{23}x$ .

#### Aufgabe 0.4

a) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5$ . Berechnen Sie den Wert  $x$  mit  $f(x) = 2\,938,66$ .

b) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 3\,000 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^7$ . Berechnen Sie den Wert  $x$

mit  $f(x) = 4\,221,30$ .

- c) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 2\,500 \left(1 + \frac{7}{100}\right)^x$ . Berechnen Sie den Wert  $x$  mit  $f(x) = 3\,751,83$ .

### Aufgabe 0.5

Ein monopolistisches Ein-Produkt-Unternehmen produziert seine Ausbringungsmenge  $x$  (in ME) mit Hilfe eines einzigen Produktionsfaktors  $r$  (in ME) gemäß folgender Produktionsfunktion:

$$x(r) = 5 \cdot \sqrt{r-1} \quad ; r \geq 1$$

Für jede eingesetzte Mengeneinheit des Produktionsfaktors fallen 200 Geldeinheiten an Kosten an. Weitere Kosten entstehen dem Unternehmen für die Produktion des Produktes nicht. Die Ausbringungsmenge  $x$  kann am Markt abgesetzt werden entsprechend der Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 60 - 0,75 \cdot p \quad ; p \in [0; 80]$$

wobei  $p$  den Verkaufspreis pro ME bezeichnet.

- a) Berechnen Sie die Preis-Absatz Funktion  $p(x)$  und geben Sie den Definitionsbereich an.
- b) Zeigen Sie, dass sich für die Kostenfunktion  $K(x) = 8x^2 + 200$  ergibt.

### Aufgabe 0.6

Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y = 8 \\ \text{II} \quad 2x + 5y = 31 \end{array}$$

### Aufgabe 0.7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y = 8 \\ \text{II} \quad 5x + 5y = 31 \end{array}$$

### Aufgabe 0.8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x + y = 8 \\ \text{II} \quad 5x + 5y = 40 \end{array}$$

### Aufgabe 0.9

*Süddeutsche vom 31.08.2016, Seite 1: Apple muss Steuern nachzahlen. Die EU-Kommission in Brüssel bezeichnete die von der irischen Regierung gewährten jahrelangen Steuervergünstigungen als illegale Staatshilfe zu Lasten von Konkurrenz-Unternehmen. Demnach musste Apple in Irland auf seine Gewinne zuletzt nur noch 0,005 Prozent Körperschaftsteuer bezahlen.*

In Irland beträgt der Körperschaftsteuersatz (kurz: KSt-Satz) 12,5 Prozent für gewerbliches Einkommen.

- a) Wie hoch ist bei einem KSt-Satz von 0,005 Prozent der Steuerbetrag (in Milliarden US-Dollar) bei folgenden Gewinnen (in Milliarden US-Dollar)?

Gewinn	Steuerbetrag
100 000 \$	
1 Mio \$	
1 Milliarde \$	

- b) Im Jahr 2015 betrug laut Forbes der Gewinn von Apple 53,7 Milliarden US-Dollar. Angenommen dieser Gewinn würde nur in Irland versteuert werden.
1. Welchen Steuerbetrag hätte Apple im Jahr 2015 in Irland bezahlt bei einem KSt-Satz von 0,005 Prozent?
  2. Welchen Steuerbetrag hätte Apple im Jahr 2015 zahlen müssen bei einem KSt-Satz von 12,5 Prozent?

*Süddeutsche vom 22.02.2020, Seite 12: „66 Stunden arbeiten Angestellte des chinesischen Apple-Zulieferers Foxconn zu Spitzenzeiten in der Woche, wenn es viele Bestellungen gibt. Der Stundenlohn beträgt 1,60 Euro. Für Überstunden erhalten sie an Werktagen eineinhalb Mal so viel Lohn, am Wochenende doppelt so viel. Die hohe Arbeitsbelastung wird von Menschenrechtsorganisationen regelmäßig kritisiert. Gibt es weniger zu tun, liegt die Arbeitszeit bei 40 Stunden über fünf Tage die Woche. Insgesamt elf Urlaubstage hat jeder Mitarbeiter pro Jahr.“*

Lösung zu Aufgabe 0.1

$f_1$  ist keine Abbildung, da die Elemente  $a_2$  und  $a_5$  kein Bild besitzen.

$f_2$  ist keine Abbildung, da das Element  $a_1$  zwei Bilder besitzt.

$f_3$  und  $f_4$  sind Abbildungen.

Lösung zu Aufgabe 0.2

a) Der Definitionsbereich von  $x(p)$  ist das Intervall  $[0; 640]$

b) Der Wertebereich von  $x(p)$  ist das Intervall  $[0; 160]$

c)  $p(x) = 640 - 4x ; x \in [0; 160]$

Lösung zu Aufgabe 0.3

a) Der Definitionsbereich von  $p(x)$  ist das Intervall  $[0; 16\ 100]$

b) Der Wertebereich von  $p(x)$  ist das Intervall  $[0; 700]$

c)  $x(p) = 16\ 100 - 23p ; p \in [0; 700]$

Lösung zu Aufgabe 0.4

$$\begin{aligned} \text{a) } x \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 &= 2\ 938,66 \\ x \cdot 1,08^5 &= 2\ 938,66 \\ x &= \frac{2\ 938,66}{1,08^5} \approx 2\ 000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3000 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^7 &= 4\ 221,30 \\ \left(1 + \frac{x}{100}\right)^7 &= \frac{4\ 221,30}{3\ 000} \\ 1 + \frac{x}{100} &= \sqrt[7]{\frac{4\ 221,30}{3\ 000}} = 1,05 \\ \frac{x}{100} &= 1,05 - 1 = 0,05 \\ x &= 100 \cdot 0,05 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2\ 500 \left(1 + \frac{7}{100}\right) &= 3\ 751,83 \\ 1,07^x &= \frac{3\ 751,83}{2\ 500} \\ x &= \log_{1,07} \frac{3\ 751,83}{2\ 500} = \frac{\ln \frac{3\ 751,83}{2\ 500}}{\ln 1,07} \approx 6 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 0.5

$$\text{a) } \begin{array}{c|c} p & x \\ \hline 0 & 60 \\ 80 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = 80 - \frac{4}{3}x ; x \in [0; 60]$$

$$\begin{array}{lcl} \text{b) } & x = 5\sqrt{r-1} & | \div 5 \\ & 0,2x = \sqrt{r-1} & | \text{quadrieren} \\ & 0,04x^2 = r-1 & | +1 \\ & 1 + 0,04x^2 = r & \end{array}$$

$$K(x) = 200 \cdot r = 200 \cdot (1 + 0,04x^2) = 200 + 8x^2 ; x \in [0; \infty)$$

Lösung zu Aufgabe 0.6

$$\mathbb{L} = \left\{ \binom{3}{5} \right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 0.7

$$\mathbb{L} = \emptyset.$$

Lösung zu Aufgabe 0.8

$$\mathbb{L} = \left\{ \binom{x}{8-x}; x \in \mathbb{R} \right\} \text{ oder } \mathbb{L} = \left\{ \binom{8-y}{y}; y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 0.9

$$\begin{aligned} \text{a) } & 100\,000 \cdot 0,005/100 = 100\,000 \cdot 0,00005 = 5 \\ & 1\,000\,000 \cdot 0,00005 = 50 \\ & 1\,000\,000\,000 \cdot 0,00005 = 50\,000 \end{aligned}$$

Gewinn	Steuerbetrag
100 000 \$	5 \$
1 Mio \$	50 \$
1 Milliarde \$	50 000 \$

- b) 1.  $53\,700\,000\,000 \cdot 0,00005 = 2\,685\,000$   
d.h. im Jahr 2015 hätte Apple in Irland 2,685 Mio US-Dollar an Körperschaftsteuer bezahlt.
2.  $53\,700\,000\,000 \cdot 0,125 = 6\,712\,500\,000$   
d.h. im Jahr 2015 hätte Apple eigentlich in Irland 6,7125 Mrd US-Dollar an Körperschaftsteuer bezahlen müssen.