QM III-Klausur am 27.09.2018

Aufgabe 1

Ein Holzverarbeitungsbetrieb schneidet Balken für den Verkauf in Baumärkten automatisch auf Länge zu. Balken, die kürzer als 498 cm sind, werden als Ausschuss betrachtet und im Falle einer Reklamation durch den Kunden umgehend ersetzt.

a) Die Länge eines Balkens nach dem Schnitt ist nicht immer exakt gleich, kann aber als normalverteilt mit Mittelwert 500 cm und Standardabweichung 1 cm angesehen werden.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Balken Ausschuss?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Palette von 50 Balken
   - kein einziger Balken
   - genau zwei Balken

   die Länge von 498 cm unterschreiten? Nennen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und ihre Parameter, wenn davon ausgegangen werden kann, dass die Längen der Balken stochastisch unabhängig voneinander sind! **Hinweis:** Machen Sie sich zunächst klar, welches zufällige Merkmal zu betrachten ist und welche Verteilung dafür in Frage kommt. Falls Sie die Wahrscheinlichkeit in Teilaufgabe **a.1)** nicht ermitteln konnten, verwenden Sie als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Balken kürzer als 498 cm ist, den Wert 0,03.
3. Mit welcher Anzahl von Balken mit einer Länge von weniger als 498 cm ist in einer Palette von 50 Balken zu rechnen?

b) Der Holzverarbeitungsbetrieb gibt gegenüber dem Baumarkt einen Ausschussanteil von weniger als einem Prozent an. Gehen Sie davon aus, dass diese Angabe stimmt. Der zentrale Einkauf des Baumarktes kündigt den Vertrag mit dem Holzverarbeitungsbetrieb, wenn sich in einer Palette mit 50 Balken vier oder mehr befinden, die kürzer als 498 cm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kündigt der zentrale Einkauf des Baumarktes den Vertrag mit dem Holzverarbeitungsbetrieb unberechtigterweise, wenn der Baumarkt genau eine Palette mit 50 Balken überprüft? **Hinweis:** Bestimmen Sie zur Beantwortung der Teilaufgabe **b)** die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Ausschussanteil von einem Prozent vier oder mehr Balken in einer Palette mit 50 Balken kürzer als 498 cm sind.

Aufgabe 2

Prüfen Sie mit einem Test zum Niveau 0,05 anhand der nachfolgenden Stichprobe, ob die Wohnort-Größe (gemessen an der Einwohnerzahl) und der Ruhestand-Status (nein, ja) stochastisch unabhängig sind. Die Stichprobe ergab sich aus einer Befragung in den USA:

Stadt-Größe	Ruhestand nein	Ruhestand ja	Summe
$< 50\,000$	2 208	305	
$\geq 50\,000$	2 059	426	
Summe			

Gehen Sie wie folgt vor:

1. Wie heißt der Test?
2. Wie lautet die Nullhypothese des Tests?
3. Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.
4. Berechnen Sie den empirischen Wert der Teststatistik.
5. Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 1:

a.1) Ausgehend von einer Normalverteilung mit obigen Parametern beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(X \leq 498) = F_U\left(\frac{498 - 500}{1}\right) = F_U(-2) = 0{,}0228.$$

Somit ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,28% ein zufällig ausgewählter Balken als Ausschuss zu betrachten.

a.2) Zu betrachten ist das Merkmal X*: Anzahl der zu kurzen Balken (weniger als* 498 *cm) in einer Palette* mit den möglichen Werten $0, 1, 2, \ldots, 50$. Dieses Merkmal kann als binomialverteilt verstanden werden mit den Parametern $n = 50$ und $p = 0{,}0228$ (alternativ nach Hinweis: $p = 0{,}03$).

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten betragen dann:

- $P(X = 0) = \binom{50}{0} \cdot 0{,}0228^0 \cdot 0{,}9772^{50} = 0{,}3156 \quad \text{(alternativ: 0,2181)}$
- $P(X = 2) = \binom{50}{2} \cdot 0{,}0228^2 \cdot 0{,}9772^{48} = 0{,}2105 \quad \text{(alternativ: 0,2555)}$

a.3) Die erwartete Anzahl zu kurzer Balken in einer Palette ist bei gegebener Binomialverteilung von X mit den Parametern $n = 50$ und $p = 0{,}0228$ (alternativ nach Hinweis: $p = 0{,}03$)

$$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}0228 = 1{,}14$$

(alternativ: 1,5).
Es ist mit etwa 1,14 zu kurzen Balken in einer Palette zu rechnen.

b) Wir betrachten hier eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 50$ und $p = 0{,}01$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt dann:

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \\ &= 1-(0{,}6050+0{,}3056+0{,}0756+0{,}0122) = 1-0{,}9984 = 0{,}0016 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für eine unberechtigte Kündigung (der Qualitätsanspruch ist grundsätzlich eingehalten, aber zufällig sind in einer Palette vier oder mehr zu kurze Balken gewesen) beläuft sich nach obiger Regel auf 0,16%.

Lösung zu Aufgabe 2:
X=Wohnort-Größe (unter 50 000 Einwohner, mindestens 50 000 Einwohner
Y=Ruhestand (nein, ja)

Stadt-Größe	Ruhestand nein	Ruhestand ja	Summe
< 50 000	2 208	305	2 513
	2 145,5	367,5	
≥ 50 000	2 059	426	2 485
	2 121,5	363,5	
Summe	4 267	731	4 998

1. Der Test heißt Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest.

2. H_0: Wohnort-Größe und Ruhestand-Status sind stochastisch unabhängig

3. df=1
   minimale erwartete Häufigkeit = $363{,}5 \geq 1$ okay
   Keine Zelle hat eine erwartete Häufigkeit kleiner als fünf, maximal 20% aller Zellen wären hier erlaubt gewesen.
   Die Faustregel ist erfüllt.

4. $\chi^2_{\text{emp.}} = \dfrac{(\mid 2\,208 - 2\,145{,}5 \mid -0{,}5)^2}{2\,145{,}5} + \dfrac{(\mid 305 - 367{,}5 \mid -0{,}5)^2}{367{,}5} + \dfrac{(\mid 2\,059 - 2\,121{,}5 \mid -0{,}5)^2}{2\,121{,}5} +$
   $\dfrac{(\mid 426 - 363{,}5 \mid -0{,}5)^2}{363{,}5} = 24{,}676$

5. $\chi^2_{\text{emp.}} = 24{,}676 > 3{,}841$
   d. h. Ablehnung von H_0; d.h. die Wohnort-Größe und der Ruhestand-Status sind nicht stochastisch unabhängig.