

# QM III-Klausur am 24.09.2019

## Aufgabe 1

Bei einer Bahngesellschaft weiß man aus Erfahrung, dass nur 85% der Fahrgäste mit Sitzplatzreservierung die reservierte Fahrt antreten. Um das Sitzplatzangebot etwas effizienter nutzen zu können, schlägt der neue Bahnvorstand vor, die Sitzplatzreservierungen strategisch etwas zu überbuchen. Für eine Einheit in einen Großraumwagen mit 18 reservierbaren Sitzplätzen sollen testweise je 20 Reservierungen verkauft werden. Setzen Sie für den Reiseantritt der einzelnen Reisenden stochastische Unabhängigkeit voraus.

- Geben Sie die Verteilung des zu betrachtenden Merkmals *Anzahl der die reservierte Reise nicht antretenden Fahrgäste je Einheit* und deren Parameter an.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es nach diesem Vorschlag vor, dass in einer Einheit das Sitzplatzangebot nicht ausreicht? Mit anderen Worten, mit welcher Wahrscheinlichkeit treten in einer Einheit weniger als zwei Personen von 20 die reservierte Reise nicht an?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit bleiben bei diesem Vorgehen in einem voll ausgebuchten Zug mit insgesamt 800 verkauften Reservierungen mehr als 36 Plätze von den insgesamt 720 reservierbaren Plätzen unbesetzt? Geben Sie die Parameter der verwendeten Verteilung an.

## Aufgabe 2

Facebook hatte Ende März 2019 in Deutschland etwa 32 Millionen Nutzer (Quelle: Statista 2019)

- Ende Februar 2016 betrug die Anzahl der Facebook-Nutzer in Deutschland 28 Millionen. Um wie viel Prozent ist die Nutzeranzahl im Zeitraum Februar 2016 bis März 2019 durchschnittlich pro Monat gestiegen?
- Bei einer Umfrage von 1 000 über 12-jährigen Personen in der BRD im April 2019 gaben 372 Personen an, Facebook zu nutzen.
  - Berechnen Sie anhand der Stichprobe ein 0,92-Konfidenzintervall für den Anteil der Facebook-Nutzer in der BRD unter den über 12-jährigen Personen im kommenden Monat.
  - Interpretieren Sie das berechnete Konfidenzintervall.
- Sind Alter und Facebook-Nutzung stochastisch unabhängig? Überprüfen Sie dies mit einem geeigneten Test zum Niveau 0,05 anhand der nachfolgenden Stichprobe:

Alters- klasse	Facebook-Nutzer		$\Sigma$
	ja	nein	
13 - 24 Jahre	87	49	
25 - 54 Jahre	243	263	
$\geq 55$ Jahre	42	316	
$\Sigma$			

1. Wie heißt der Test?
2. Wie lautet die Nullhypothese des Tests?
3. Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.
4. Berechnen Sie den empirischen Wert der Teststatistik.
5. Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

*Lösung zu Aufgabe 1:*

- a) Verteilung für die Anzahl  $X$  der die Fahrt nicht antretenden Fahrgäste: Binomialverteilung mit Parametern  $n = 20$  und  $p = 0,15$ .
- b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich mit  $X$  als Anzahl der die reservierte Reise nicht antretenden Fahrgäste aus einer Binomialverteilung mit den Parametern  $n = 20$  und  $p = 0,15$ .

$$P(X < 2) = \binom{20}{0} 0,15^0 (0,85)^{20} + \binom{20}{1} 0,15^1 (0,85)^{19} = 0,0388 + 0,1368 = 0,1756$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von gut 17,5% kommt es bei diesem Vorschlag des Bahnvorstands in einer Einheit zu Platznot.

- c)  $X =$  Anzahl der ihre Reise nicht antretenden Fahrgäste in einem voll ausgebuchten Zug  
 $X$  ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 800$  und  $p = 0,15$ .  
 Die Faustregel  $np = 120 \geq 10$  und  $n(1-p) = 680 \geq 10$  ist erfüllt. Die Approximation dieser Verteilung erfolgt dann mit einer Normalverteilung mit den Parametern  $\mu = n \cdot p = 120$  und  $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 102$ .

Damit jeder Fahrgast mit Reservierung einen Sitzplatz erhält, müssen mindestens 80 Passagiere ihre Reise nicht antreten. Und damit noch mindestens 36 Plätze unbesetzt sind, müssen zusätzlich zu den 80 Personen mehr als weitere 36 Personen ihre Reise nicht antreten:  $80 + 36 = 116$  Personen.

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann:

$$P(X > 116) = 1 - P(X \leq 116) \approx 1 - F_U\left(\frac{116 + 0,5 - 120}{\sqrt{102}}\right) \approx 1 - F_U(-0,3466) = 1 - 0,364 = 0,636$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 64% verbleiben noch mehr als 36 freie Plätze.

*Lösung zu Aufgabe 2:*

- a) Zeitraum Ende Februar 2016 bis Ende März 2019 = 37 Monate

$$\sqrt[37]{\frac{32}{28}} = 1,003615$$

d.h. die Anzahl der Facebook-Nutzer ist im Zeitraum Ende Februar 2016 bis Ende März 2019 um durchschnittlich etwa 0,36% pro Monat gestiegen.

- b)  $p =$  Anteil der Facebook-Nutzer in der BRD im nächsten Monat

1. Die Faustregel  $n = 1\,000 \geq 100$  für ein KI für  $p$  ist erfüllt.  
Der 96 %-Punkt der Standardnormalverteilung beträgt 1,7507.

$$0,372 \pm 1,7507 \cdot \sqrt{\frac{0,372 \cdot 0,628}{1\,000}} = [0,35; 0,40]$$

2. [35%; 40%] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der Anteil der Facebook-Nutzer im kommenden Monat mit einer Wahrscheinlichkeit von 92 % liegt.

c) Die erwarteten Häufigkeiten betragen:

Alters- klasse	Facebook-Nutzer		$\Sigma$
	ja	nein	
13 - 24 Jahre	87 50,6	49 85,4	136
25 - 54 Jahre	243 188,2	263 317,8	506
$\geq 55$ Jahre	42 133,2	316 224,8	358
$\Sigma$	372	628	1\,000

1. Der Test heißt Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest.
2.  $H_0$ : Alter und Facebook-Nutzung sind stochastisch unabhängig
3.  $df=2$   
minimale erwartete Häufigkeit =  $50,6 \geq 1$  okay  
Keine Zelle hat eine erwartete Häufigkeit kleiner als fünf, maximal 20% aller Zellen wären hier erlaubt gewesen.  
Die Faustregel ist erfüllt.
4. 
$$\chi_{\text{emp}}^2 = \frac{(87 - 50,6)^2}{50,6} + \frac{(49 - 85,4)^2}{85,4} + \frac{(243 - 188,2)^2}{188,2} + \frac{(263 - 317,8)^2}{317,8} + \frac{(42 - 133,2)^2}{133,2} + \frac{(316 - 224,8)^2}{224,8} = 166,429$$
5.  $\chi_{\text{emp}}^2 = 166,429 > 5,991$   
d. h. Ablehnung von  $H_0$ ; d.h. Alter und Facebook-Nutzung sind nicht stochastisch unabhängig.