QM III-Klausur am 08.07.2019

Aufgabe 1

Die mittlere Erderwärmung beträgt zurzeit etwa 0,2 Grad Celsius pro Jahr. Gehen Sie davon aus, dass die jährliche Erderwärmung (gemessen in Grad Celsius) normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 0,2°C und der Standardabweichung 0,01°C.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im nächsten Jahr die Erderwärmung

1. über 0,18°C liegt?
2. zwischen 0,18°C und 0,22°C liegt?
3. genau 0,2°C beträgt?

b) Welcher Wert der Erderwärmung wird im nächsten Jahr mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% überschritten?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten vier Jahren die Erderwärmung genau zweimal über 0,18°C liegt? (Nehmen Sie dazu an, dass die jährlichen Werte der Erderwärmung stochastisch unabhängig voneinander sind.)

Aufgabe 2

Der Hersteller von vermeintlich hochwertigen Kletterseilen für den Outdoorbetrieb behauptet, dass die mittlere Reißfestigkeit seiner Seile mindestens 2 500 kp beträgt. Für sechs zufällig aus der Produktion des Herstellers entnommene Seile wird ein Belastungstest durchgeführt und die Reißfestigkeit festgestellt. Dabei wird die Kraft gemessen, bei der das Seil reißt. Der Belastungstest hat für die ausgewählten Seile folgende Ergebnisse gebracht:

$$x_1 = 2\,400 \qquad x_2 = 2\,200 \qquad x_3 = 2\,400 \qquad x_4 = 2\,100 \qquad x_5 = 2\,580 \qquad x_6 = 2\,300.$$

Die beobachteten Werte stellen eine konkrete Stichprobe des zufälligen Merkmals X *Reißfestigkeit (in kp) von Kletterseilen dieses bestimmten Typs* dar, welches als normalverteilt mit gegebener Standardabweichung 200 kp angenommen werden kann.

a) Ermitteln Sie zunächst den Durchschnittswert für die Reißfestigkeit der untersuchten Seile und geben Sie für die mittlere Reißfestigkeit ein konkretes 90% Konfidenzintervall an.

b) Es soll eine weitere Stichprobe gezogen werden. Wie groß muss der Stichprobenumfang mindestens sein, damit das konkrete 90% Konfidenzintervall maximal eine Breite von 100 kp besitzt?

c) Was würden Sie angesichts der Ergebnisse aus den vorigen Teilaufgaben über die Herstellerangabe einer Mindestreißfestigkeit von 2 500 kp denken? Ist diese Angabe so zu halten? Versuchen Sie mittels eines einseitigen Tests zum Niveau 0,05 nachzuweisen, dass die Herstellerangabe falsch ist, also die Reißfestigkeit der Seile unterhalb von 2 500 kp liegt. Verwenden Sie dafür die ursprüngliche Stichprobe der Größe $n = 6$ und halten Sie sich bei der Lösung dieser Aufgabe an das folgende Schema:

1. Wie heißt der Test?
2. Führen Sie zunächst einen zweiseitigen Test durch.
3. Wie lautet die Nullhypothese des einseitigen Tests?
4. Bestimmen Sie den p-Wert.
5. Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $X =$ jährliche Erderwärmung (in Grad Celsius)
$X \sim \mathsf{N}(\mu = 0{,}2; \sigma = 0{,}01)$

1. $P(X > 0{,}18) = 1 - P(X \leq 0{,}18) = 1 - F_U\left(\dfrac{0{,}18 - 0{,}2}{0{,}01}\right) = 1 - F_U(-2) = 1 - 0{,}023 = 0{,}977$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,977.
2. *1. Lösungsweg:*
$[\mu - 2 \cdot \sigma; \mu + 2 \cdot \sigma] = [0{,}18; 0{,}22]$ zweifaches zentrales Schwankungsintervall
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,95.
2. Lösungsweg:
$P(X \leq 0{,}22) - P(X \leq 0{,}18) = F_U\left(\dfrac{0{,}22 - 0{,}2}{0{,}01}\right) - 0{,}023 = F_U(2) - 0{,}023 = 0{,}977 - 0{,}023 = 0{,}954$
3. $P(X = 0{,}2) = 0$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt null.

b) $0{,}05 = P(X \leq x) \Leftrightarrow -1{,}6449 = \dfrac{x - 0{,}2}{0{,}01} \Leftrightarrow x = 0{,}2 - 1{,}6449 \cdot 0{,}01 = 0{,}183551$
d.h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt die Erderwärmung im nächsten Jahr über 0,183551°C.

c) $Y =$Anzahl der Jahre mit einer Erderwärmung über 0,18°C in den kommenden vier Jahren
$Y \sim \mathsf{B}(n = 4; p = 0{,}978)$
$P(Y = 2) = \dbinom{4}{2} \cdot 0{,}978^2 \cdot 0{,}023^2 = 0{,}0028$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,0028.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Der Durchschnittswert der Stichprobe beträgt:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \frac{13\,980}{6} = 2\,330$$

und damit ergibt sich das folgende Konfidenzintervall bei bekannter Varianz $\sigma^2 = 200^2$:

$$\overline{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\,330 \pm 1{,}6449 \frac{200}{\sqrt{6}} = [2\,195{,}69; 2\,464{,}31] \approx [2\,196; 2\,464].$$

b) Die Mindeststichprobengröße für $2 \cdot \epsilon = 100$ beträgt

$$n \geq \frac{u^2 \cdot \sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{1{,}6449^2 \cdot 200^2}{50^2} = 43{,}29.$$

Es muss also eine Stichprobengröße von mindestens $n = 44$ angesetzt werden.

c) Es soll bei bekannter Varianz getestet werden, ob der Durchschnittswert $\mu_0 = 2\,500$ unterschritten wird. Diese Unterschreitung muss demnach die Alternativhypothese des Tests bilden.

1. Man verwendet den Gaußtest, weil die Varianz $\sigma^2 = 200^2$ bekannt ist.
2. $H_0 : E[X] = 2\,500$ gegen $H_1 : E[X] \neq 2\,500$
   p-Wert:
   $p\text{-Wert} = 2 \cdot F_U\left(- \mid \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \mid\right) = 2 \cdot F_U\left(- \mid \dfrac{2\,330 - 2\,500}{200/\sqrt{6}} \mid\right) = 2 \cdot F_U(-2{,}0821) \approx 2 \cdot 0{,}019 = 0{,}038$
   d.h. die mittlere Reißfestigkeit unterscheidet sich signifikant von 2 500 kp.
3. $H_0 :\ E[X] \geq 2\,500$ und $H_1 :\ E[X] < 2\,500$
4. p-Wert:
   $$p\text{-Wert} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}038 = 0{,}019$$
5. Wegen $0{,}019 < 0{,}05$ ist der p-Wert kleiner als die Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}05$ und damit wird die Nullhypothese des einseitigen Tests abgelehnt.

Somit liegt die mittlere Reißfestigkeit signifikant unter 2 500 kp.