QM III-Klausur am 03.02.2020

Aufgabe 1

Der Verbraucherpreisindex VPI mit den Basisgewichten aus dem Jahr 2010 stieg in einem Kölner Veedel von 2010 bis zum Jahr 2018 auf 180 an. Der Preisindex für Mieten, der im Jahr 2010 im VPI eine Basisgewichtung von 25% ausmachte, hat sich im angegebenen Zeitraum aufgrund der Gentrifizierung des Veedels verdreifacht. Im Jahre 2018 wurde ein neuer Verbraucherpreisindex erstellt, für den der Mietanteil nun 60% beträgt.

a) Weisen Sie den Verbraucherpreisindex für die Entwicklung von 2010 bis 2018 mit den jeweiligen Gewichten aus dem Basisjahr 2010 in der Unterteilung 'Mieten' und 'übrige Waren' aus. Welchen Preisanstieg haben die 'übrigen Waren' ohne Mieten in diesem Zeitraum zu verzeichnen gehabt?

b) In einer Bürgerinitiative wird für dieses Veedel das Thema Mietendeckel diskutiert. Die durchschnittliche Miete sollte gemäß eines vorgestellten Vorschlags über die betrachteten acht Jahre nur um maximal 50% teurer werden. Auf welchen Wert würde sich der Verbraucherpreisindex im Zeitraum 2010 bis 2018 beschränken, wenn die Mietentwicklung in dieser Form gedeckelt gewesen wäre und sich die übrigen Angaben wie in Teilaufgabe a) entwickelt hätten?

c) Aller Voraussicht nach sollen in diesem Veedel im kommenden Jahr 15% der unsanierten Mietshäuser saniert und anschließend einer deutlichen Mieterhöhung unterzogen werden. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Sanierung der Mietshäuser stochastisch unabhängig voneinander geschieht. Die Mitglieder der Bürgerinitiative leben in 24 verschiedenen Mietshäusern.

   1. Mit wie vielen neu von einer Mieterhöhung betroffenen Mietshäusern ist im kommenden Jahr zu rechnen?
   2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es nur ein einziges Mietshaus?
   3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es fünf Mietshäuser oder mehr?

Aufgabe 2

Gemäß dem Klimarat IPCC (Quelle: Südd. vom 04.11.2019) steigt der Meeresspiegel zurzeit um 4 mm pro Jahr aufgrund der Erderwärmung und der damit verbundenen Eisschmelze in der Arktis und Antarktis. Nehmen Sie an, dass die Standardabweichung des Meeresspiegel-Anstiegs jedes Jahr 0,1 mm beträgt.

a) Wie groß ist näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass der Meeresspiegel in 30 Jahren um mehr als 11,9 cm insgesamt gestiegen sein wird?

b) Im Zeitraum 1901 bis 2010 ist der Meeresspiegel um 190 mm insgesamt angestiegen.

   1. Berechnen Sie ein 0,92-Konfidenzintervall für den mittleren jährlichen Anstieg des Meeresspiegels.
   2. Interpretieren Sie das Konfidenzintervall.

c) Prüfen Sie mit einem geeigneten Test zum Niveau 0,05, ob die Erderwärmung und der Meeresspiegelanstieg stochastisch unabhängig voneinander sind anhand der nachfolgenden Stichprobe.
In einer Küstenstadt wurde 100 Monate lang festgehalten, wie häufig der Anstieg des Meeresspiegels über dem langjährigen Monatsmittel lag und wie häufig die Temperatur über dem langjährigen Monatsmittel lag:

Anstieg Meeresspiegel	Temperatur nicht über	Temperatur über	
nicht über	28	17	
über	8	47	

1. Wie heißt der Test?
2. Wie lautet die Nullhypothese des Tests?
3. Überprüfen Sie, ob die Faustregel des Tests erfüllt ist.
4. Berechnen Sie den empirischen Wert der Teststatistik.
5. Wie lautet die Testentscheidung aufgrund der obigen Stichprobe? (Begründung!) Interpretieren Sie in knappen Worten das Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Im Basisjahr 2010 betragen alle drei Indizes P^{Mieten}, $P^{\text{Übrige Waren}}$, VPI 100. Es bezeichne x den Preisindex für die übrigen Waren im Berichtsjahr 2018:

Warengruppe	2010 Gewicht	2010 Index	2018 Gewicht	2018 Index
Mieten	0,25	100	0,60	300
Übrige	0,75	100	0,40	x
VPI	100		180	

Der Verbraucherpreisindex VPI für das Berichtsjahr 2018 mit den Gewichten aus dem Basisjahr 2010 ergibt sich wie folgt:

$$1{,}8 = 0{,}25 \cdot 3 + 0{,}75 \cdot x \Leftrightarrow 1{,}05 = 0{,}75x \Leftrightarrow x = \frac{1{,}05}{0{,}75} = 1{,}4$$

d.h. im Jahr 2018 beträgt der Preisindex für die übrigen Waren 140.

$$\frac{P_{2018}^{\text{Übrige Waren}}}{P_{2010}^{\text{Übrige Waren}}} = \frac{140}{100} = 1{,}4$$

d.h. im Zeitraum 2010 bis 2018 sind die Kosten für die übrigen Waren um 40% insgesamt gestiegen.

b) Gesucht ist der VPI mit dem Basisjahr 2010 und dem Berichtsjahr 2018:

Waren- gruppe	2010 Gewicht	2010 Index	2018 Gewicht	2018 Index
Mieten	0,25	100	0,60	150
Übrige	0,75	100	0,40	140
VPI	100		?	

VPI $=0{,}25 \cdot 1{,}5 + 0{,}75 \cdot 1{,}4 = 1{,}425$
d.h. der VPI wäre um 42,5% insgesamt gestiegen.
Unter Annahme des Mietendeckels und damit einer Mietsteigerung von durchschnittlich nur 50% zwischen 2010 und 2018 würde sich ein Verbraucherpreisindex von VPI = 142,5 ergeben. Die gesamte Preissteigerung des VPI im Zeitraum 2010 bis 2018 würde somit 42,5% statt 80% betragen und sich in etwa halbieren.

c) X als zufällige Anzahl der von einer Sanierung im kommenden Jahr betroffenen Mietshäuser ist eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 24$ und $p = 0{,}15$. Der Erwartungswert ist dann gegeben als $E(X) = n \cdot p = 24 \cdot 0{,}15 = 3{,}6$. Damit gilt:

1. Es ist mit etwa 3,6 von der Mieterhöhung betroffenen Mietshäusern im kommenden Jahr zu rechnen.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass nur genau ein Mietshaus betroffen ist, beträgt:

$$P(X=1) = \binom{24}{1} 0{,}15^1 (0{,}85)^{23} = 0{,}086$$

und damit knapp 9%.
3. Mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned}
P(X \geq 5) &= 1 - P(X \leq 4) = 1 - (P(X=0) + ... + P(X=4)) \\
&= 1 - \left(\binom{24}{0} 0{,}15^0 (0{,}85)^{24} + ... \binom{24}{4} 0{,}15^4 (0{,}85)^{20} \right) \\
&= 1 - (0{,}020 + 0{,}086 + 0{,}174 + 0{,}225 + 0{,}209) \\
&= 1 - 0{,}714 = 0{,}286
\end{aligned}$$

sind es fünf Mietshäuser oder mehr.

Lösung zu Aufgabe 2
X = Meeresspiegel-Anstieg (in mm)
$\mu = E[X] = 4$
$\sigma = 0{,}1 \Leftrightarrow \sigma^2 = 0{,}01$

a) Faustregel des Zentralen Grenzwertsatzes: $n = 30 \geq 30$ ist erfüllt
1. Lösungsweg:
$P(X_1 + X_2 + \dots X_{30} > 119) = 1 - P(X_1 + X_2 + \dots X_{30} \leq 119) \approx 1 - F_U\left(\frac{119 - 30 \cdot 4}{\sqrt{30 \cdot 0{,}01}}\right) =$
$1 - F_U(-1{,}8257) = 1 - 0{,}034 = 0{,}966$

d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt näherungsweise etwa 96,6 %.

2. Lösungsweg:

Y = Meeresspiegel-Anstieg (in cm)

$\mu = E[Y] = 0{,}4$

$\sigma = 0{,}01 \Leftrightarrow \sigma^2 = 0{,}000\,1$

$P(Y_1 + Y_2 + \ldots Y_{30} > 11{,}9) = 1 - P(Y_1 + Y_2 + \ldots Y_{30} \leq 11{,}9) \approx 1 - F_U\left(\frac{11{,}9 - 30 \cdot 0{,}4}{\sqrt{30 \cdot 0{,}000\,1}}\right) =$
$1 - F_U(-1{,}8257) = 1 - 0{,}034 = 0{,}966$

b) μ = mittlerer Anstieg (in mm) des Meeresspiegels pro Jahr

$n = 109 \geq 30$ Faustregel erfüllt

$\overline{x} = \frac{190}{109} = 1{,}743119\,\text{mm}$ durchschnittlicher Anstieg pro Jahr

0,96-Prozentpunkt = 1,7507

1. 0,92-KI für $\mu = \frac{190}{109} \pm 1{,}7507 \cdot \frac{0{,}1}{\sqrt{109}} = 1{,}74 \pm 0{,}02 = [1{,}72\,;\,1{,}76]$
2. [1,72 mm; 1,76 mm] ist ein geschätztes Intervall für den Bereich, in dem der mittlere jährliche Anstieg mit einer Wahrscheinlichkeit von 92 % liegt.

c) X= Meeresspiegel-Anstieg (1=nicht über langjährigem Mittel, 2 = über langjährigem Mittel)

Y= Temperatur (1=nicht über langjährigem Mittel, 2 = über langjährigem Mittel)

Anstieg	Temperatur		
Meeresspiegel	nicht über	über	$\sum$
nicht über	28 16,2	17 28,8	45
über	8 19,8	47 35,2	55
$\sum$	36	64	100

1. Der Test heißt Chi-Quadrat-Unabhängigkeitstest.
2. H_0: Erderwärmung und Meeresspiegel-Anstieg sind stochastisch unabhängig
3. df=1
   minimale erwartete Häufigkeit = $16{,}2 \geq 1$ okay
   Keine Zelle hat eine erwartete Häufigkeit kleiner als fünf, maximal 20% aller Zellen wären hier erlaubt gewesen.
   Die Faustregel ist erfüllt.
4. $\chi^2_{\text{emp.}} = \frac{(\mid 28 - 16{,}2 \mid -0{,}5)^2}{16{,}2} + \frac{(\mid 17 - 28{,}8 \mid -0{,}5)^2}{28{,}8} + \frac{(\mid 8 - 19{,}8 \mid -0{,}5)^2}{19{,}8} +$
   $\frac{(\mid 47 - 35{,}2 \mid -0{,}5)^2}{35{,}2} = 22{,}392$

5. $\chi^2_{\text{emp.}} = 22{,}392 > 3{,}841$
d.h. Ablehnung von H_0; d.h. Erderwärmung und Meeresspiegel-Anstieg sind nicht stochastisch unabhängig.