QM II am 27.09.2018

Aufgabe 1

Für eine Anlage von 10 000 Euro über fünf Jahre bei 2 % nominellem Jahreszins erhält jemand drei verschiedene Anlage-Alternativen:

1. Anlage zu linearer Verzinsung
2. Anlage zu monatlicher Verzinsung zum relativen Zins
3. Anlage zu stetiger Verzinsung

a) Bei welcher dieser drei Alternativen ist das Endguthaben nach fünf Jahren am größten?

b) Wie hoch ist bei jeder der drei Alternativen der jeweilige effektive Jahreszins; d. h. welcher nachschüssige Jahreszins führt nach fünf Jahren zu denselben Endguthaben wie unter Teilaufgabe a)?

c) Nach wie vielen vollen Jahren wird erstmals der Betrag von 10 618 Euro überschritten? Beantworten Sie diese Frage für jede der drei Anlage-Alternativen.

Lösung zu Aufgabe 1:

a)
1. $K_5 = 10\,000(1 + 5 \cdot 0{,}02) = 11\,000$
2. $K_5 = 10\,000 \left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{5 \cdot 12} = 10\,000 \cdot 1{,}001\overline{6}^{60} = 11\,050{,}79$
3. $K_5 = 10\,000 \cdot e^{5 \cdot 0{,}02} = 11\,051{,}71$

d. h. zu stetiger Verzinsung ist das Guthaben nach fünf Jahren am größten.

b)
1. $11\,000 = 10\,000 \cdot q^5 \Leftrightarrow q = \sqrt[5]{\frac{11\,000}{10\,000}} = 1{,}019245$

   d. h. bei linearer Verzinsung beträgt der effektive Jahreszins 1,9245 %.

2. $11\,050{,}79 = 10\,000 \cdot q^5 \Leftrightarrow q = \sqrt[5]{\frac{11\,050{,}79}{10\,000}} = 1{,}020184$

   d. h. bei monatlicher Verzinsung zum relativen Zins beträgt der effektive Jahreszins 2,0184 %.

   2. Lösungsweg:

   $j = \left(1 + \frac{0{,}02}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}02018436$

3. $11\,051{,}71 = 10\,000 \cdot q^5 \Leftrightarrow q = \sqrt[5]{\frac{11\,051{,}71}{10\,000}} = 1{,}02020134003$

   d. h. bei stetiger Verzinsung beträgt der effektive Jahreszins 2,0201 %.

c)
1. $10\,618 = 10\,000(1 + n \cdot 0{,}02) \Leftrightarrow 0{,}0618 = n \cdot 0{,}02 \Leftrightarrow n = 3{,}09 \approx 4$

   Bei linearer Verzinsung wird nach vier vollen Jahren erstmals der Betrag von 10 618 Euro überschritten.

2. $n = \dfrac{\ln \frac{10\,618}{10\,000}}{\ln 1{,}02018436} = 3{,}000777 \approx 4$

   Bei monatlicher Verzinsung zum relativen Zins wird erstmals nach vier Jahren der Betrag von 10 618 Euro überschritten.

3. *1. Lösungsweg.*

   $$n = \frac{\ln \frac{10\,618}{10\,000}}{\ln 1{,}02020134003} = 2{,}998279 \approx 3$$

   Bei stetiger Verzinsung wird erstmals nach drei Jahren der Betrag von 10 618 Euro überschritten.

   2. Lösungsweg:

   $$\begin{aligned} 10\,618 &= 10\,000 \cdot e^{0{,}02 \cdot n} \\ 1{,}0618 &= e^{0{,}02 \cdot n} \\ \ln 1{,}0618 &= 0{,}02 \cdot n \\ n &= \frac{\ln 1{,}0618}{0{,}02} = 2{,}998279 \end{aligned}$$

QM II am 27.09.2018

Aufgabe 2

1. In welchem Intervall liegen die Werte des Bestimmtheitsmaßes?

2. Der Bauer Herr Landmann hat drei Hunde (Sherlock, Watson und Molly), von denen jede Nacht einer den Hof bewacht. Von zehn Nächten wacht Sherlock in sechs, Watson in drei und Molly in einer.

   Jede Nacht unternimmt der Fuchs einen Versuch, ein Huhn von Herrn Landmann zu stehlen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Sherlock den Fuchs bei seinem Versuch ertappt und verjagt, ist 0,95. Bei Watson beträgt sie 0,8 und bei Molly 0,9. (*Hinweis: Letztere Wahrscheinlichkeiten stellen bedingte Wahrscheinlichkeiten dar.*)

   Für jede Nacht:

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sherlock nicht zur Wache eingesetzt wird?

   b) Wenn Watson eingesetzt ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er den Fuchs nicht ertappt und verjagt, so dass dieser unbemerkt ein Huhn stehlen kann?

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fuchs unbemerkt ein Huhn stiehlt?

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sherlock in dieser Nacht wacht und der Fuchs unbemerkt ein Huhn stiehlt?

   e) Dem Bauer fehlt am Morgen ein Huhn. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sherlock gewacht hat?

Lösung zu Aufgabe 2:

1. Die Werte von B liegen immer im Intervall [0;1].

2. F=Fuchs stiehlt ein Huhn $\Rightarrow \overline{F}$= Fuchs wird verjagt
   S=Sherlock hält Wache
   W=Watson hält Wache
   M=Molly hält Wache

   $$\begin{array}{lll} 0{,}95 = P(\overline{F} \mid S) & 0{,}6 = P(S) & P(S \cap \overline{F}) = 0{,}95 \cdot 0{,}6 = 0{,}57 \\ 0{,}80 = P(\overline{F} \mid W) & 0{,}3 = P(W) & P(W \cap \overline{F}) = 0{,}80 \cdot 0{,}3 = 0{,}24 \\ 0{,}90 = P(\overline{F} \mid M) & 0{,}1 = P(M) & P(M \cap \overline{F}) = 0{,}90 \cdot 0{,}1 = 0{,}09 \end{array}$$

   1. Lösungsweg mit Arbeitstabelle:

	S	W	M	
F	0,03	0,06	0,01	0,10
$\overline{F}$	0,57	0,24	0,09	0,90
	0,6	0,3	0,1	1

   a) $P(\overline{S}) = 0{,}40$
      d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,40.

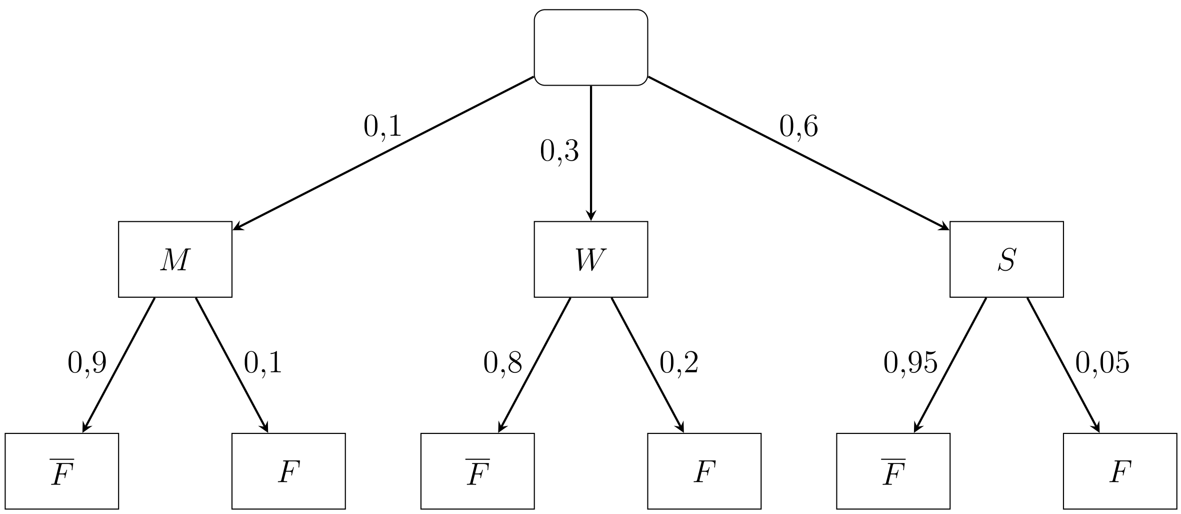
b) $P(F \mid W) = \dfrac{0{,}06}{0{,}3} = 0{,}2$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,20.

c) $P(F) = 0{,}1$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,10.

d) $P(S \cap F) = 0{,}03$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,03.

e) $P(S \mid F) = \dfrac{0{,}03}{0{,}10} = 0{,}3$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,30.

2. Lösungsweg mit Baumdiagramm:



a) $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0{,}6 = 0{,}40$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,40.

b) $P(F \mid W) = 1 - P(\overline{F} \mid W) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,20.

c) $P(F) = 0{,}6 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,10.

d) $P(S \cap F) = P(F \mid S) \cdot P(S) = 0{,}05 \cdot 0{,}6 = 0{,}03$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,03.

e) $P(S \mid F) = \dfrac{P(S \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}10} = 0{,}3$
d.h. die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,30.