

Klausur QM II am 23.09.2019

Aufgabe 1

a) Welche der folgenden vier Aussagen ist richtig?

Hinweis: Es ist pro Frage nur eine Antwort korrekt.

1) Ein Investor kann zu einem Zinssatz von 2,00% p.a. Kapital anlegen. Bei welcher Verzinsungsart ist das Kapital nach 10 Jahren und 21 Tagen am höchsten?

- Lineare Verzinsung
- Stetige Verzinsung
- Halbjährliche Verzinsung zum relativen Zins
- Relativ gemischte Verzinsung

2) Frau Müller hat heute ein Vermögen von 10 Mio. Euro. Wie lange kann Frau Müller am Ende eines jeden Jahres Kapital in Höhe von 100 000 Euro aus dem Vermögen entnehmen, wenn dieses mit 1,00% p.a. verzinst wird?

- 69 Jahre lang
- 100 Jahre lang
- Keine Aussage möglich
- Ewig

3) Eine Schuld in Höhe von 90 000 Euro wird mit 2% p.a. verzinst und soll über eine Ratentilgung mit einer jährlichen Rate in Höhe von 3 000 Euro getilgt werden. Die Zinsen im 15. Jahr belaufen sich auf:

- 60 Euro
- 900 Euro
- 960 Euro
- 1800 Euro

b) Eine Rentenkasse hat Verbindlichkeiten in Form zu zahlender Versorgungsleistungen an Rentenempfänger. Demgegenüber steht eine Kapitalanlage (bspw. Investitionen in Wertpapiere), die zur Bedienung der Verbindlichkeiten dienen. Der Zinssatz beläuft sich auf 3,00% p.a.

1) Die Rentenkasse zahlt ihren Rentenempfängern die Versorgungsleistung zum jeweiligen Monatsersten aus. Diese monatlichen Auszahlungen belaufen sich insgesamt auf 1 Mio. Euro. Bestimmen Sie den heutigen Wert aller zu zahlenden Versorgungsleistungen, wenn die genannten Zahlungen für 30 Jahre unverändert fortgeführt werden.

2) Aus der Kapitalanlage erhält die Rentenkasse folgende Auszahlungen:

- 100 Mio. Euro in 5 Jahren
- 120 Mio. Euro in 10 Jahren
- 140 Mio. Euro in 25 Jahren

Bestimmen Sie den Barwert der Kapitalanlage der Rentenkasse.

- 3) Reicht der Wert der Kapitalanlage des Versorgungswerks aus, um die Verbindlichkeiten aus den Rentenzahlungen zu erfüllen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Richtige Antworten sind:

1) lineare Verz.

$$1 + \left(10 + \frac{21}{360}\right) \cdot 0,02 = 1,201167$$

stetige Verz.

$$e^{\left(10 + \frac{21}{360}\right) \cdot 0,02} = 1,222829$$

halbjährliche Verz. zum relativen Zins:

$$\left(1 + \frac{0,02}{2}\right)^{2 \cdot 10} = 1,01^{20} = 1,22019$$

relativ gemischte Verz.:

$$1,02^{10} \cdot \left(1 + \frac{21}{360} \cdot 0,02\right) = 1,220417$$

d.h. bei stetiger Verzinsung ist das Kapital am höchsten.

2) 1. Lösungsweg:

$$100\,000 = 10\,000\,000 \cdot 0,01$$

d.h. die Entnahme von jeweils 100 000 Euro am Ende eines jeden Jahres entspricht genau den 1% Zinsen von 10 Mio., deshalb ist diese Entnahme ewig möglich.

2. Lösungsweg:

$$n = -\frac{\ln \left[1 - \frac{10\,000\,000}{100\,000} \cdot 0,01\right]}{\ln 1,01} = -\frac{\ln 0}{\ln 1,01} = \text{nicht erklärt}$$

d.h. die Entnahme ist höchstens genauso groß wie die Zinsen und kann deshalb ewig entnommen werden. (vgl. Beispiel 4.7 aus Arrenberg „Finanzmathematik“).

3) $K_{14} = 90\,000 - 14 \cdot 3\,000 = 48\,000$

$$Z_{15} = 48\,000 \cdot 0,02 = 960$$

d.h. Die Zinsen belaufen sich auf 960 Euro.

b) 1) nachschüssige jährliche Ersatzrente r_j :

$$r_j = 1.000.000 \cdot \left(12 + \frac{12 + 1}{2} \cdot 0,03 \right) = 12.195.000$$

Rentenbarwert:

$$R_0 = 12.195.000 \cdot \frac{1,03^{30} - 1}{0,03} \cdot \frac{1}{1,03^{30}} = 239.027.382,26 \approx 239 \text{ Mio. Euro}$$

2) $K_0 = \frac{100}{1,03^5} + \frac{120}{1,03^{10}} + \frac{140}{1,03^{25}} = 242,416\,927\,92 \approx 242 \text{ Mio. Euro}$

3) Der Wert der Kapitalanlage reicht aus, um die Verpflichtungen zu erfüllen, da der Barwert 242 Mio. Euro der Kapitalanlage den Barwert 239 Mio. Euro der Verpflichtungen übersteigt.

QM II-Klausur am 23.09.2019

Aufgabe 1:

a) Welche der folgenden vier Aussagen ist richtig?

Hinweis: Es ist pro Frage nur eine Antwort korrekt.

1. Für eine Korrelation in Höhe von $r = 0,8$ gilt:

- Das Bestimmtheitsmaß ist kleiner als r .
- Das Bestimmtheitsmaß ist genauso groß wie r .
- Das Bestimmtheitsmaß ist größer als r .
- Es lässt sich keine allgemeine Aussage machen über das Größenverhältnis von Korrelation und Bestimmtheitsmaß.

2. Die diskrete Zufallsvariable X kann genau fünf verschiedene Werte annehmen und zwar mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,4	a	$3a$

wobei a eine positive reelle Zahl ist. Dann gilt:

- $a = 0,1$.
- $3a = 0,1$.
- $4a = 0,1$.
- $a > 0,1$.

b) Gehen Sie von folgenden Nutzerzahlen von Facebook in der BRD aus:

Jahr	Nutzer
2016	28 Mio.
2017	32 Mio.
2018	37 Mio.

Mit welcher Nutzerzahl ist dann im Jahr 2019 in der BRD gemäß der Methode der kleinsten Quadrate zu rechnen?

c) Von den über 12-jährigen Einwohnern in der BRD

- nutzen 53% Facebook,
- sind 33% nicht älter als 34 Jahre,
- sind 89% der Nicht-Facebook-Nutzer älter als 34 Jahre.

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig in der BRD ausgewählter über 12 Jahre alter Facebook-Nutzer höchstens 34 Jahre alt ist?

Lösung:

a) Richtig sind folgende Aussagen:

1. Das Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0,8^2 = 0,64$ ist kleiner als $r = 0,8$.

2. Die Summe aller fünf Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben:

$$1 = 0,2 + 0,3 + 0,4 + a + 3a = 0,9 + 4a$$

Minus 0,9 ergibt:

$$0,1 = 4a.$$

Somit ist die Aussage $4a = 0,1$ richtig.

b) 1. Lösungsweg: $X = \text{Jahr}$

$Y = \text{Anzahl Nutzer}$

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
2016	28		
2017	32		
2018	37		
6 051	97	195 658	12 204 869

Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot 2019 = ?$

$$b_1 = \frac{3 \cdot 195\,658 - 6\,051 \cdot 97}{3 \cdot 12\,204\,869 - 6\,051^2} = 4,5$$

$$a_1 = \frac{97 - 4,5 \cdot 6\,051}{3} = -9\,044,1\bar{6}$$

$$a_1 + b_1 \cdot 2019 = 41,3 \approx 41$$

d.h. es ist mit etwa 41 Millionen Nutzern zu rechnen.

2. Lösungsweg: $X = \text{Zeitpunkte } (6,7,8)$

$Y = \text{Anzahl Nutzer}$

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
6	28		
7	32		
8	37		
21	97	688	149

Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot 9 = ?$

$$b_1 = \frac{3 \cdot 688 - 21 \cdot 97}{3 \cdot 149 - 21^2} = 4,5$$

$$a_1 = \frac{97 - 4,5 \cdot 21}{3} = 0,8\bar{3}$$

$$a_1 + b_1 \cdot 9 = 41,3 \approx 41$$

d.h. es ist mit etwa 41 Millionen Nutzern zu rechnen.

c) $FB = \text{Facebook-Nutzer}$

$J = 13\text{-}34 \text{ Jahre}$

$A = \text{älter als } 34 \text{ Jahre}$

$$0,53 = P(FB) \Rightarrow P(\overline{FB}) = 0,47$$

$$0,33 = P(J)$$

$$0,89 = P(A|\overline{FB}) \Rightarrow P(A \cap \overline{FB}) = 0,89 \cdot 0,47 \approx 0,42$$

Arbeitstabelle:

	FB	\overline{FB}	
J	0,28	0,05	0,33
A	0,25	0,42	0,67
	0,53	0,47	1

$$P(J|FB) = \frac{0,28}{0,53} = 0,52830 \approx 0,53$$

d.h. etwa 53% der über 12-jährigen Facebook-Nutzer sind höchstens 34 Jahre alt.