

QM II-Klausur am 04.02.2020

Aufgabe 1

Welche der folgenden vier Aussagen ist richtig?

Hinweis: Es ist pro Frage nur eine Antwort korrekt.

- 1) Herr Schulze möchte in den kommenden 25 Jahren 500.000 Euro ansparen. Um sein Sparziel zu erreichen, möchte er immer am 31. Dezember eines jeden Jahres einen über die 25 Jahre gleichbleibenden Betrag einzahlen. Unterstellen Sie einen Zinssatz in Höhe von 1% p.a. Wie hoch muss die jährliche Einzahlung sein, damit das Sparziel erreicht wird?
 - 17.528,10 Euro
 - 17.703,38 Euro
 - 20.000,00 Euro
 - 20.200,00 Euro

- 2) Ein Unternehmen möchte ein Investitionsprojekt mit einer Laufzeit von 10 Jahren durchführen. Die damit einhergehenden Kosten belaufen sich auf 100 Mio. Euro zu Beginn des ersten und auf 110 Mio. Euro zu Beginn des zweiten Jahres. Die Einnahmen aus dem Projekt fallen vom ersten Jahr an immer zum Periodenende an. Der Zinssatz beläuft sich auf 10% p.a. Wie hoch muss der jährliche Periodenüberschuss des Investitionsprojekts mindestens sein, damit sich die Durchführung des Investitionsprojekts für das Unternehmen auf Basis des Kapitalwerts lohnt?
 - 32.549.078,98 Euro
 - 34.176.532,94 Euro
 - 82.675.149,48 Euro
 - 210.000.000,01 Euro

- 3) Zwei Investoren A und B legen ein Vermögen von jeweils K_0 GE zu einem Zinssatz in Höhe von 5% p.a. an. Investor A legt sein Vermögen zu halbjährlicher Verzinsung zum relativen Zins für ein Jahr an. Wie lange muss Investor B sein Kapital bei stetiger Verzinsung anlegen, damit er über das gleiche Endkapital wie Investor A verfügt?
 - Ungefähr 0,4290 Jahre
 - Ungefähr 0,9758 Jahre
 - Ungefähr 0,9877 Jahre
 - Keine Antwort möglich

Aufgabe 2

Zur Finanzierung einer Immobilie wird am 01.01.2021 ein Kredit zu 1,2 % Jahreszins in Höhe

von 250 000 Euro aufgenommen.

Der Kredit soll durch eine Annuitätentilgung über 20 Jahre zurückgezahlt werden. Wie hoch ist der letzte Zinsbetrag?

Aufgabe 3

Welche der folgenden vier Aussagen ist richtig?

Hinweis: Es ist pro Frage nur eine Antwort korrekt.

- 1) Sei $f(x) = 2 + 5x$ eine lineare Regressionsgerade einer linearen Regression von Y auf X . Dann gilt für das Streudiagramm:
 - Je dichter die Punkte im Streudiagramm an der eingezeichneten Regressionsgeraden liegen, desto stärker ist die Korrelation zwischen X und Y .
 - Je weiter die Punkte im Streudiagramm von der eingezeichneten Regressionsgeraden entfernt liegen, desto stärker ist die Korrelation zwischen X und Y .
 - Nur wenn alle Punkte genau auf der eingezeichneten Regressionsgeraden liegen, ist die Korrelation zwischen X und Y stark.
 - Die Lage der Punkte im Streudiagramm hat nichts zu tun mit der Stärke der Korrelation.

- 2) Für die Ereignisse A = „Augenzahl beim Würfeln beträgt Zwei“ und B = „Augenzahl beim Würfeln ist gerade“ gilt:
 - $P(A \cap B)$ ist kleiner als $P(A)$.
 - $P(A \cap B)$ ist genauso groß wie $P(A)$.
 - $P(A \cap B)$ ist größer als $P(A)$.
 - Es lässt sich keine allgemeine Aussage über das Größenverhältnis von $P(A \cap B)$ und $P(A)$ machen.

- 3) Bei fünf Personen wird die Körpergröße sowohl in cm (Variable X) als auch in Metern (Variable Y) erfasst. Welche der folgenden Aussagen zur empirischen Streuung ist korrekt?
 - Die beiden Standardabweichungen s_x und s_y sind gleich groß.
 - Die beiden Varianzen s_x^2 und s_y^2 sind gleich groß.
 - Die beiden Variationskoeffizienten v_x und v_y sind gleich groß.
 - Die beiden Spannweiten $x_{\max} - x_{\min}$ und $y_{\max} - y_{\min}$ sind gleich groß.

Aufgabe 4

Es sind folgende Daten für Wirtschaftswachstum und Zinssatz pro Jahr gegeben:

	Wirtschaftswachstum p.a.	Zinssatz p.a.
Arithmetisches Mittel	2,4%	1,9%
Standardabweichung	3,0%	2,0%
Minimum	-10,0%	-1,0%
Maximum	4,5%	8,0%

Der Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson zwischen Wirtschaftswachstum p.a. und Zins p.a. beläuft sich auf $-0,81$. Welches Wirtschaftswachstum p.a. erwarten Sie auf Basis einer linearen Regression, wenn sich der Zins auf $-0,30\%$ p.a. beläuft? Ist der Wert zuverlässig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 1:

Richtig sind:

1. Antwort 2

$$500\,000 = r \frac{1,01^{25} - 1}{0,01} = r \cdot 28,2432 \Leftrightarrow r = \frac{500\,000}{28,2432} = 17\,703,38 \text{ Euro}$$

2. Antwort 1

$$\text{Anschaffungskosten} = 100 + \frac{110}{1,1} = 200 \text{ Mio. Euro}$$

Annuitätenmethode:

$$0 = K_0 = A \cdot \frac{1,1^{10} - 1}{0,1} \cdot \frac{1}{1,1^{10}} - 200 = A \cdot 6,144567 - 200$$

Addition von 200 ergibt:

$$A = 200 \cdot \frac{0,1 \cdot 1,1^{10}}{1,1^{10} - 1} = 32,549\,078\,977$$

d.h. die Periodenüberschüsse müssen jedes Jahr mindestens 32 549 078,98 Euro betragen, damit sich die Investition lohnt.

3. Antwort 3

$$\text{Investor A: } K_1 = K_0 \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 = 1,050625 \cdot K_0$$

$$\text{Investor B: } K_n = K_0 \cdot e^{0,05n}$$

$$\text{Gleichung: } 1,050625 \cdot K_0 = K_0 \cdot e^{0,05n}$$

Division durch K_0 ergibt:

$$1,050625 = e^{0,05n}$$

Der ln auf beiden Seiten ergibt:

$$\ln 1,050625 = \ln(e^{0,05n}) = 0,05n \cdot \ln(e) = 0,05n$$

Division durch 0,05 ergibt:

$$n = \frac{\ln 1,050625}{0,05} = 0,9877045 \approx 0,9877 \text{ Jahre}$$

Lösung zu Aufgabe 2:

$$250\,000 \cdot 1,012^{20} = A \cdot \frac{1,012^{20} - 1}{0,012} \Leftrightarrow A = 14\,134,44$$

$$K_{19} = 250\,000 \cdot 1,012^{19} - 14\,134,44 \frac{1,012^{19} - 1}{0,012} = 13\,966,78$$

$$Z_{20} = 13\,966,78 \cdot 0,012 = 167,60$$

d.h. der letzte Zinsbetrag beträgt 167,60 Euro.

Lösung zu Aufgabe 3:

Richtig sind folgende Aussagen:

1. Je dichter die Punkte im Streudiagramm an der eingezeichneten Regressionsgeraden liegen, desto stärker ist die Korrelation zwischen X und Y .

2. $A = \{2\}$ und $B = \{2, 4, 6\}$ und $A \cap B = \{2\}$

$$P(A) = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$$

3. 1. Lösungsweg:

Seien $x_1, \dots, x_5 = 160, 170, 180, 170, 170$ und $y_1, \dots, y_5 = 1,6, 1,7, 1,8, 1,7, 1,7$. Dann gilt:

$$x_{\max} - x_{\min} = 0,3 \neq 30 = y_{\max} - y_{\min}$$

$$\bar{x} = 1,7 \text{ und } \bar{y} = 170$$

$$s_x^2 = 0,004 \neq 40 = s_y^2$$

$$v_x = \frac{0,004^{0,5}}{1,7} = 0,03720327 = \frac{40^{0,5}}{170} = v_y$$

d.h. die beiden Variationskoeffizienten sind gleich groß.

2. Lösungsweg:

Es ist offensichtlich, dass die beiden Spannweiten nicht gleich groß sein können. Wären die beiden Varianzen gleich groß, so müssten auch die beiden Standardabweichungen gleich groß sein. Da aber nur eine der vier Aussagen richtig ist, kann das nicht der Fall sein. Also sind die beiden Variationskoeffizienten gleich groß.

Lösung zu Aufgabe 4:

Da $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$, ergibt sich die Kovarianz durch $s_{xy} = r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y = -0,81 \cdot 3 \cdot 2 = -4,86$.

1. Lösungsweg:

X = Zinssatz

Y = Wirtschaftswachstum

Gesucht: $a_1 + b_1 \cdot -0,3 = ?$

Für b_1 ergibt sich:

$$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{-4,86}{2^2} = -1,215$$

Für a_1 ergibt sich:

$$a_1 = \bar{y} - b_1 \cdot \bar{x} = 2,4 - (-1,215) \cdot 1,9 = 4,7085$$

d.h. für einen Zinssatz von -0,30% p.a. ist ein Wirtschaftswachstum (in %) in Höhe von:

$$4,7085 - 1,215 \cdot (-0,30) = 4,7085 + 1,215 \cdot 0,3 = 5,073$$

zu erwarten. Der erwartete Wert für das Wirtschaftswachstum in Höhe von 5,073% p.a. ist zuverlässig, da

1. es sich um einen interpolierten Wert handelt, weil $-0,30\% \in [-1,0\%; 8,0\%]$.
2. die Korrelation zwischen Wirtschaftswachstum und Zinssatz stark ist.

2. Lösungsweg:

X = Wirtschaftswachstum

Y = Zinssatz

Gesucht: $a_2 + b_2 \cdot -0,3 = ?$

Für b_2 ergibt sich:

$$b_2 = \frac{s_{xy}}{s_y^2} = \frac{-4,86}{2^2} = -1,215$$

Für a_2 ergibt sich:

$$a_1 = \bar{x} - b_2 \cdot \bar{y} = 2,4 - (-1,215) \cdot 1,9 = 4,7085$$

d.h. für einen Zinssatz von -0,30% p.a. ist ein Wirtschaftswachstum (in %) in Höhe von:

$$4,7085 - 1,215 \cdot (-0,30) = 4,7085 + 1,215 \cdot 0,3 = 5,073$$

zu erwarten.