Klausur QM I am 30.01.2019

Aufgabe 1

a) Seien A, B, C (n, n)-Matrizen und E die (n, n)-Einheitsmatrix, mit $n \in \mathbb{N}$. A^t bezeichne die transponierte Matrix (Transponierte) einer Matrix A.
C sei eine symmetrische Matrix.
Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie, soweit es geht, zusammen:

1. $E(CA - B) + 2B - AC$
2. $(3C \cdot B^t)^t$
3. $(C + E)^t \cdot B - CB$

b) Für eine Absatzmenge x (in ME) und den Verkaufspreis p (in GE pro ME) lautet die Preis-Absatz Funktion eines Unternehmens wie folgt:

$$x(p) = \frac{115}{8 + p}$$

1. Geben Sie den Definitionsbereich der Preis-Absatz Funktion $x(p)$ an.
2. Berechnen und interprieren Sie die Elastizität von $x(p)$ an der Stelle $p = 7$.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion:

$$f(x) = 5x \cdot \ln x \quad ; x > 0$$

keine Wendestellen hat.

Aufgabe 2

a) Jede der drei Kostenstellen K_1, K_2, K_3 eines Unternehmens erbringt Leistungen (in Leistungseinheiten) für die jeweils anderen Kostenstellen und für Kunden außerhalb des Unternehmens gemäß folgender Tabelle:

	an K_1	an K_2	an K_3	an Kunden
von K_1	0	10	20	80
von K_2	40	0	30	70
von K_3	15	25	0	120

Primärkosten fallen bei K_1 in Höhe von 190 GE, bei K_2 in Höhe von 590 GE und bei K_3 in Höhe von 1 000 GE an.
Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf. (*Hinweis: Die Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise ist hier NICHT erforderlich!*)

b) Das Endtableau eines Gaußalgorithmus sieht wie folgt aus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	
①	12	4	-3	-28
②	0	4	1	44
③	0	0	0	0

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zugrunde liegenden Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nicht negtiven Lösungen.
3. Bestimmen Sie alle ganzzahligen nicht negativen Lösungen.

Aufgabe 3:
Ein Unternehmen stellt zwei Güter A und B her. Die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Mengen x des Gutes A und y des Gutes B lautet:

$$K(x,y) = 4x + 2y + 18 \ \ ; x, y > 0$$

Die Verkaufspreise der Güter betragen 5 GE für eine ME von Gut A bzw. 4 GE für eine ME von Gut B.
Wie hoch ist der maximale Gewinn, wenn die Produktionsrestriktion:

$$x^2 + y^2 = 125$$

eingehalten werden muss?

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Die Mulitplikation einer Matrix mit der Einheitsmatrix ergibt die ursprüngliche Matrix. Für das Transponieren einer Matrix A gilt: $(A^t)^t = A$. Und eine symmetrische Matrix ist identisch mit ihrer Transponierten, also insb. gilt: $C^t = C$ und $E^t = E$. Beim Auflösen der Klammer gilt: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

   1. $E(CA - B) + 2B - AC = CA - B + 2B - AC = CA + B - AC$
   2. $(3C \cdot B^t)^t = 3 \cdot (C \cdot B^t)^t = 3 \cdot B \cdot C^t = 3BC$
   3. $(C + E)^t \cdot B - CB = C^t \cdot B + B - CB = CB + B - CB = B$

b) 1. $p \in [0; \infty)$
   2. $x(7) = \dfrac{115}{15} = 7{,}\overline{6}$

      $x'(p) = ?$

      1. Lösungsweg: Kettenregel

      $x'(p) = \left(115 \cdot (8+p)^{-1}\right)' = -115 \cdot (8+p)^{-2} \cdot 1 = -\dfrac{115}{(8+p)^2}$

      2. Lösungsweg: Quotientenregel

      $x'(p) = \dfrac{0 \cdot (8+p) - 115 \cdot 1}{(8+p)^2} = -\dfrac{115}{(8+p)^2}$

      $x'(7) = -\dfrac{115}{15^2} = -\dfrac{115}{225} = 0{,}5\overline{1}$

      $\epsilon_x(7) = -0{,}5\overline{1} \cdot \dfrac{7}{7{,}\overline{6}} = -0{,}4\overline{6}$

      d. h. steigt der Preis von 7 GE um ein Prozent auf 7,07 GE, so sinkt der Absatz um etwa 0,47 Prozent.

c) Produktregel:
$f'(x) = 5 \cdot \ln(x) + 5x \cdot \dfrac{1}{x} = 5 \cdot \ln(x) + 5$
$f''(x) = \dfrac{5}{x}$
$f'''(x) = -\dfrac{5}{x^2}$
$0 = \dfrac{5}{x}$ ↯
d. h. die zweite Ableitung hat keine Nullstelle; d. h. die Funktion hat keine Wendestelle.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) v_1= Bewertung in GE für eine in K_1 hergestellte LE
v_2= Bewertung in GE für eine in K_2 hergestellte LE
v_3= Bewertung in GE für eine in K_3 hergestellte LE
Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 110v_1 - 40v_2 - 15v_3 = 190 \\ \text{II} & -10v_1 + 140v_2 - 25v_3 = 590 \\ \text{III} & -20v_1 - 30v_2 + 160v_3 = 1\,000 \end{array}$$

b) Zeile 2: $4x_2 + x_3 = 44 \Leftrightarrow x_2 = 11 - \frac{1}{4}x_3$
Zeile 1: $12x_1 + 4(11 - \frac{1}{4}x_3) - 3x_3 = -28 \Leftrightarrow 12x_1 + 44 - x_3 - 3x_3 = -28 \Leftrightarrow 12x_1 = 4x_3 - 72 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}x_3 - 6$

1. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_3 - 6 \\ 11 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$
2. $x_1 = \frac{1}{3}x_3 - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \geq 18$
$x_2 = 11 - \frac{1}{4}x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 11 \geq \frac{1}{4}x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 44$
$x_3 \geq 0$
3. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_3 - 6 \\ 11 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [18; 44] \right\}$
4. Wegen der beiden Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ muss x_3 ein Vielfaches der Zahl Zwölf sein.
$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_3 - 6 \\ 11 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \{24; 36\} \right\}$

Lösung zu Aufgabe 3:
$U(x, y) = 5x + 4y$
$G(x, y) = 5x + 4y - 4x - 2y - 18 = x + 2y - 18 \;\; ; x, y > 0$

$L(x,y,\lambda) = x + 2y - 18 + \lambda(x^2 + y^2 - 125)$

$$\begin{array}{rclrcl}
L_x(x,y,\lambda) & = & 1 + 2\lambda x & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 2\lambda \\
L_y(x,y,\lambda) & = & 2 + 2\lambda y & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 2\lambda \\
L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x^2 + y^2 - 125 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 0
\end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{I} & 0 = 1 + 2\lambda x \\
\mathrm{II} & 0 = 2 + 2\lambda y \\
\mathrm{III} & 0 = x^2 + y^2 - 125 \\
\hline
y \cdot \mathrm{I} & 0 = y + 2\lambda xy \\
x \cdot \mathrm{II} & 0 = 2x + 2\lambda xy \\
\hline
y \cdot \mathrm{I} - x \cdot \mathrm{II} & 0 = y - 2x \Leftrightarrow y = 2x \\
\mathrm{III} & 0 = x^2 + (2x)^2 - 125 = x^2 + 4x^2 - 125 = 5x^2 - 125 \\
 & x^2 = 25 \Leftrightarrow \quad \underbrace{x = -5}_{\notin \text{ Def.-Bereich}} \quad \text{oder } x = 5 \Rightarrow y = 2 \cdot 5 = 10 \\
\hline
\mathrm{I} & 0 = 1 + 2 \cdot \lambda \cdot 5 = 1 + 10\lambda \Leftrightarrow \lambda = -0{,}1
\end{array}$$

d. h. $(5; 10; -0{,}1)$ ist ein stationärer Punkt.

Hinreichende Bedingung:

$D(x; y; -0{,}1) = (2 \cdot -0{,}1)^2 - 0 = (-0{,}2)^2 = 0{,}04 >_{\text{immer}} 0$

$L_{xx}(x; y; -0{,}1) = 2 \cdot (-0{,}1) = -0{,}2 <_{\text{immer}} 0$

d.h. $G(x,y)$ hat in $(5; 10)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

$G(5; 10) = 5 + 20 - 18 = 7$

d. h. der maximale Gewinn unter der Produktrestriktion beträgt 7 GE.