Klausur QM I am 26.09.2018

Aufgabe 1

a) Die nachfolgende Kostenfunktion gibt die Kosten (in GE) in Abhängigkeit der hergestellten Mengeneinheiten x an:

$$K(x) = 2x^3 - 25x^2 + 250x + 3\,000 \ ; x \in \mathbb{R}^+$$

Berechnen und interpretieren Sie die Grenzkosten an der Stelle $x = 4$.

b) Gegeben sei die Funktion:

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2y + z^3 - 12z - 2ay + 99 \ ; x, y, z \in \mathbb{R}$$

Dabei sei a eine beliebige reelle Zahl.

1. Bestimmen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $f(x, y, z)$.
2. Bestimmen Sie alle (x, y, z)-Kombinationen (stationäre Punkte), an denen ein lokaler Extremwert liegen könnte.

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion:

$$f(x) = \left(e^{3x} + 1\right)^5 \ ; x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie mit dem Gaußalgorithmus die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20 \\ \text{II} & -x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6 \\ \text{III} & 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{array}$$

b) Ein Unternehmen stellt in einer ersten Produktionsstufe aus den drei Rohmaterialen R_1, R_2 und R_3 die beiden Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 her. Aus den Zwischenprodukten werden in der zweiten Produktionsstufe die Endprodukte E_1 und E_2 gefertigt. Der Direktbedarf (in ME) an Rohmaterial pro einer Mengeneinheit der Zwischenprodukte ist gegeben durch:

	Z_1	Z_2
R_1	1	2
R_2	3	2
R_3	1	4

Der Direktbedarf (in ME) an Zwischenprodukten pro einer Mengeneinheit der Endprodukte ist gegeben durch:

	E_1	E_2
Z_1	3	2
Z_2	2	1

1. Geben Sie die Gesamtbedarfsmatrix an.
2. Es sollen 75 Mengeneinheiten von E_1 und 120 Mengeneinheiten von E_2 hergestellt werden. Wie viele Mengeneinheiten der Rohmaterialien R_1, R_2 und R_3 werden hierfür benötigt?
3. Eine Mengeneinheit von Rohstoff R_1 kostet 3 Geldeinheiten (GE), eine Mengeneinheit von Rohstoff R_2 kostet 5 Geldeinheiten (GE) und eine Mengeneinheit von Rohstoff R_3 kostet 4 Geldeinheiten (GE). Welche Rohmaterialkosten (in Geldeinheiten) fallen bei der Herstellung des Produktionsprogramms 75 ME von E_1 und 120 ME von E_2 insgesamt an?

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie mit der Lagrange-Methode unter der Nebenbedingung $5x + 3y = 90$ das globale Minimum der Funktion:

$$f(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 3xy - 66x + \frac{7}{2}y^2 + 12\frac{2}{5}y + 100 \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $K'(x) = 6x^2 - 50x + 250$
$K'(4) = 146$
d. h. werden statt 4 ME jetzt 5 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 146 GE.

b) 1. $$\begin{array}{lcllcllcl} f_x(x,y,z) &=& 2x+2y & f_{xx}(x,y,z) &=& 2 & f_{xy}(x,y,z) &=& 2 \\ f_y(x,y,z) &=& 4y+2x-2-2a & f_{yy}(x,y,z) &=& 4 & f_{xz}(x,y,z) &=& 0 \\ f_z(x,y,z) &=& 3z^2-12 & f_{zz}(x,y,z) &=& 6z & f_{yz}(x,y,z) &=& 0 \end{array}$$

2. Notwendige Bedingung:
$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 0 &=& 2x+2y & \Leftrightarrow x=-y \\ \text{II} & 0 &=& 4y+2x-2-2a & \\ \text{III} & 0 &=& 3z^2-12 & \Leftrightarrow z^2=4 \Leftrightarrow z=\pm 2 \\ \hline \text{II}-\text{I} & 0 &=& 2y-2-2a \Leftrightarrow 2+2a=2y \Leftrightarrow y=1+a \Rightarrow x=-1-a & \end{array}$$
d.h. $(-1-a;1+a;2)$ und$(-1-a;1+a;-2)$ sind stationäre Punkte.

c) Kettenregel:
innere Funktion $i(x) = e^{3x} + 1 \Rightarrow i'(x) = 3e^{3x}$
äußere Funktion $a(y) = y^5 \Rightarrow a'(y) = 5y^4$
$f'(x) = 5\left(e^{3x}+1\right)^4 \cdot 3e^{3x} = 15e^{3x} \cdot \left(e^{3x}+1\right)^4$

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	2	2	7	20	
2	$\boxed{-1}$	-4	3	6	
3	3	5	-2	3	
4	-1	-4	3	6	2
5	0	$\boxed{-6}$	13	32	1 $+2\cdot$ 2
6	0	-7	7	21	3 $+3\cdot$ 2
7	-1	-4	3	6	4
8	0	-6	13	32	5
9	0	0	-49	-98	$6\cdot$ 6 $-7\cdot$ 5

Zeile 9: $-49x_3 = -98 \iff x_3 = 2.$

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $-6x_2 + 26 = 32 \iff -6x_2 = 6 \iff x_2 = -1.$

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $-x_1 + 4 + 6 = 6 \iff -x_1 = -4 \iff x_1 = 4.$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

b) 1. Gesamtbedarf $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 13 & 8 \\ 11 & 6 \end{bmatrix}$

2. *1. Lösungsweg:*

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 13 & 8 \\ 11 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 75 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,005 \\ 1\,935 \\ 1\,545 \end{bmatrix}$$

2. Lösungsweg:

$$\begin{array}{c|cc} & 75E_1 & 120E_2 \\ \hline R_1 & 7\cdot 75 & 4\cdot 120 \\ R_2 & 13\cdot 75 & 8\cdot 120 \\ R_3 & 11\cdot 75 & 6\cdot 120 \end{array} = \begin{array}{c|c} R_1 & 1\,005 \\ R_2 & 1\,935 \\ R_3 & 1\,545 \end{array}$$

d. h. es werden 1 005 ME von R_1, 1 935 ME von R_2 und 1 545 ME von R_3 benötigt.

3. *1. Lösungsweg:*

$1\,005 \cdot 3 + 1\,935 \cdot 5 + 1\,545 \cdot 4 = 18\,870$

d. h. die Kosten betragen 18 870 GE.

2. Lösungsweg:

$$[3, 5, 4] \cdot \begin{bmatrix} 1\,005 \\ 1\,935 \\ 1\,545 \end{bmatrix} = 18\,870$$

Lösung zu Aufgabe 3:

$$L(x, y, \lambda) = \frac{5}{2}x^2 + 3xy - 66x + \frac{7}{2}y^2 + 12\frac{2}{5}y + 100 + \lambda(5x + 3y - 90)$$

$$
\begin{array}{rclrcl}
L_x(x,y,\lambda) & = & 5x+3y-66+5\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 5 \\
L_y(x,y,\lambda) & = & 3x+7y+12\dfrac{2}{5}+3\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 7 \\
L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 5x+3y-90 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 3
\end{array}
$$

Notwendige Bedingung:

I	$0=5x+3y-66+5\lambda$
II	$0=3x+7y+12\frac{2}{5}+3\lambda$
III	$0=5x+3y-90$
$3\cdot\mathrm{I}$	$0=15x+9y-198+15\lambda$
$5\cdot\mathrm{II}$	$0=15x+35y+62+15\lambda$
$5\cdot\mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I}$	$0=26y+260\Leftrightarrow y=-10$
III	$0=5x-30-90=5x-120\Leftrightarrow x=24$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.
d.h. $(24;-10;\lambda_0)$ ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(x,y,\lambda_0)=5\cdot 7-3^2=35-9=26>_{\text{immer}} 0$
$L_{xx}(x;y;\lambda_0)=5>_{\text{immer}} 0$
d.h. $f(x,y)$ hat in $(24;-10)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.