Klausur QM I am 24.09.2019

Aufgabe 1

a) Welche der folgenden drei Ableitungen ist die erste Ableitung der Funktion:

$$f(x) = x^2 \cdot 2^x \quad ; x \geq 0?$$

(Begründung!)

1. $f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot \ln(2)$
2. $f'(x) = 2x \cdot \ln(2) + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2)$
3. $f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2)$

b) Gegeben ist die Kostenfunktion:

$$K(x) = x^3 - 15x^2 + 75x + 1 \quad ; x \geq 0$$

1. Berechnen Sie die Grenzkosten an der Stelle $x_0 = 2$.
2. Interpretieren Sie die Grenzkosten an der Stelle $x_0 = 2$.

c) Wie lässt sich die Anzahl der Matrizenmultiplikationen im nachfolgenden Term auf genau eine Matrizenmultiplikation reduzieren, wobei A, B, C 3×3 Matrizen sind?

$$4C(B - A) + 5C(A - B) - CB$$

Aufgabe 2

a) Jede der drei Kostenstellen K_1, K_2, K_3 eines Unternehmens erbringt Leistungen (in Leistungseinheiten) für die jeweils anderen Kostenstellen und für Kunden außerhalb des Unternehmens gemäß folgender Tabelle:

	an K_1	an K_2	an K_3	an Kunden
von K_1	0	10	20	40
von K_2	15	0	8	50
von K_3	12	16	0	60

Primärkosten fallen bei K_1 in Höhe von 47 GE, bei K_2 in Höhe von 135 GE und bei K_3 in Höhe von 288 GE an.

1. Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf.
2. Berechnen Sie mit dem Gaußalgorithmus die Lösungsmenge des Gleichungssystems.
3. Wie hoch sind die innerbetrieblichen Verrechnungspreise?

b) Das Endtableau eines Gaußalgorithmus sieht wie folgt aus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	
①	1	5	-72	-165
②	0	1	-15	-41
③	0	0	0	0

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zugrunde liegenden Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nicht negtiven Lösungen.
3. Geben Sie eine ganzzahlige nicht negative Lösung an.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode die Extremstelle der Funktion:

$$f(x,y) = -x^2 - y^2 + 9x + 17y - 10 \qquad ; x, y > 0$$

unter der Nebenbedingung $x + y = 10$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
2. Berechnen Sie alle für die Lagrange-Methode erforderlichen partiellen Ableitungen.
3. Bestimmen Sie die Extremstelle mit Hilfe der Lagrange-Methode.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Produktregel: $f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln(2) = x \cdot 2^x \left[2 + x \cdot \ln(2)\right]$

b) $K'(x) = 3x^2 - 30x + 75$

   1. $K'(2) = 12 - 60 + 75 = 27$
   2. Werden statt 2 ME jetzt 3 ME hergestellt, so steigen die Kosten um etwa 27 GE.

c) $4C(B - A) + 5C(A - B) - CB = 4CB - 4CA + 5CA - 5CB - CB = CA - 2CB = C(A - 2B)$

Lösung zu Aufgabe 2

a) v_1= Bewertung in GE für eine in K_1 hergestellte LE
   v_2= Bewertung in GE für eine in K_2 hergestellte LE
   v_3= Bewertung in GE für eine in K_3 hergestellte LE

   1. Kostengleichgewicht:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & (10+20+40)v_1 - 15v_2 - 12v_3 & = & 47 \\ \text{II} & (15+8+50)v_2 - 10v_1 - 16v_3 & = & 135 \\ \text{III} & (12+16+60)v_3 - 20v_1 - 8v_2 & = & 288 \end{array}$$

2. Gaußalgorithmus

Zeile	v_1	v_2	v_3		Operation
1	70	-15	-12	47	
2	$\boxed{-10}$	73	-16	135	
3	-20	-8	88	288	
4	-10	73	-16	135	2
5	0	496	-124	992	1$+7\cdot$ 2
6	0	$\boxed{-154}$	120	18	3$-2\cdot$ 2
7	-10	73	-16	135	4
8	0	-154	120	18	6
9	0	0	40 424	161 696	$154\cdot$ 5$+496\cdot$ 6

9 $40\,424 v_3 = 161\,696 \Leftrightarrow v_3 = 4$

8 $-154v_2 + 480 = 18 \Leftrightarrow -154v_2 = -462 \Leftrightarrow v_2 = \dfrac{-462}{-154} = 3$

7 $-10v_1 + 219 - 64 = 135 \Leftrightarrow -10v_1 = -20 \Leftrightarrow v_1 = \dfrac{-20}{-10} = 2$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

3. Die innerbetrieblichen Verrechnungspreise betragen in K_1 genau 2 GE, in K_2 genau 3 GE und in K_3 genau 4 GE.

b) Zeile 2: $x_2 - 15x_3 = -41 \Leftrightarrow x_2 = 15x_3 - 41$
Zeile 1: $x_1 + 5(15x_3 - 41) - 72x_3 = -165 \Leftrightarrow x_1 + 75x_3 - 205 - 72x_3 = -165 \Leftrightarrow x_1 + 3x_3 = 40 \Leftrightarrow x_1 = 40 - 3x_3$

1. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 40 - 3x_3 \\ 15x_3 - 41 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

2. $x_1 = 40 - 3x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 40 \geq 3x_3 \Leftrightarrow 13{,}\overline{3} \geq x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 13{,}\overline{3}$
$x_2 = 15x_3 - 41 \geq 0 \Leftrightarrow 15x_3 \geq 41 \Leftrightarrow x_3 \geq 2{,}7\overline{3}$
$x_3 \geq 0$
$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 40 - 3x_3 \\ 15x_3 - 41 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in [2{,}7\overline{3}; 13{,}\overline{3}] \right\}$

3. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 40 - 3x_3 \\ 15x_3 - 41 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \right\}$

Eine ganzzahlige nicht negative Lösung ist z.B. für $x_3 = 10$: $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 10 \\ 109 \\ 10 \end{pmatrix} \}$

Lösung zu Aufgabe 3:

1. $L(x, y, \lambda) = -x^2 - y^2 + 9x + 17y - 10 + \lambda(x + y - 10)$

2. $$\begin{array}{lcl lcl} L_x(x,y,\lambda) & = & -2x + 9 + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & -2 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & -2y + 17 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & -2 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x + y - 10 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}$$

3. Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 = -2x + 9 + \lambda \\ \text{II} & 0 = -2y + 17 + \lambda \\ \text{III} & 0 = x + y - 10 \\ \hline \text{I} - \text{II} & 0 = -2x + 2y - 8 \Leftrightarrow 2y = 8 + 2x \leftrightarrow y = 4 + x \\ \text{III} & 0 = x + 4 + x - 10 = 2x - 6 \Leftrightarrow x = 3 \\ & y = 4 + 3 = 7 \\ \hline \end{array}$$

   Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.
   d.h. $(3; 7; \lambda_0)$ ist ein stationärer Punkt.
   Hinreichende Bedingung:
   $D(x, y, \lambda_0) = (-2) \cdot (-2) = 4 >_{\text{immer}} 0$
   $L_{xx}(x; y; \lambda_0) = -2 <_{\text{immer}} 0$
   d.h. $f(x, y)$ hat in $(3; 7)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.