Klausur QM I am 08.07.2019

Aufgabe 1

a) Berechnen und interpretieren Sie die Elastizität an der Stelle $p_0 = 16$ der folgenden Preis-Absatz Funktion:

$$x(p) = 32 - 0{,}4p \qquad ; p \in [0; 80]$$

b) Berechnen Sie das Matrizenprodukt $A \cdot B$ der beiden folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2a & 0 & -1 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}.$$

c) Bestimmen Sie die Sattelstellen der Funktion:

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 15xy \qquad ; x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie mit dem Gaußalgorithmus die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llcl} \text{I} & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 52 \\ \text{II} & -4x_1 + x_2 + 6x_3 & = & 25 \\ \text{III} & 7x_1 - 3x_2 + 8x_3 & = & 61 \end{array}$$

b) Das Endtableau eines Gaußalgorithmus sieht wie folgt aus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	
①	2	-8	102	280
②	0	1	-12	-30
③	0	0	0	0

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zugrunde liegenden Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nicht negtiven Lösungen.
3. Geben Sie eine ganzzahlige nicht negative Lösung an.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode die Extremstelle der Funktion:

$$f(x, y) = 25x + 40y + 700 \qquad ; x, y > 0$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 356$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
2. Berechnen Sie alle für die Lagrange-Methode erforderlichen partiellen Ableitungen.
3. Bestimmen Sie die Extremstelle mit Hilfe der Lagrange-Methode.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $x(16) = 32 - 0{,}4 \cdot 16 = 25{,}6$

$x'(p) = -0{,}4$

$\varepsilon_x(16) = -0{,}4 \cdot \dfrac{16}{25{,}6} = -0{,}25$

d.h. wird der Preis von 16 GE um ein Prozent erhöht, so sinkt der Absatz um 0,25 Prozent.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2a & 0 & -1 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$

c)
$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = 3x + 15y & f_{xx}(x,y) = 3 \\ f_y(x,y) = -3y + 15x & f_{yy}(x,y) = -3 \\ & f_{xy}(x,y) = 15 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lcclr} \text{I} & 0 & = & 3x + 15y & \\ \text{II} & 0 & = & -3y + 15x & \\ \hline \text{I} & 0 & = & 3x + 15y & \\ 5 \cdot \text{II} & 0 & = & -15y + 75x & \\ \hline \text{I} + 5 \cdot \text{II} & 0 & = & 78x & \Leftrightarrow x = 0 \\ \text{I} & 0 & = & 0 + 15y & \Leftrightarrow y = 0 \end{array}$$

d.h. $(0;0)$ ist ein stationärer Punkt.

Hinreichende Bedingung:

$D(0;0) = 3 \cdot (-3) - 15^2 = -234 < 0$

d.h. $(0;0)$ ist eine Sattelstelle

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{3}$	2	5	52	
2	-4	1	6	25	
3	7	-3	8	61	
4	3	2	5	52	1
5	0	$\boxed{11}$	38	283	$3 \cdot$ 2 $+ 4 \cdot$ 1
6	0	-23	-11	-181	$3 \cdot$ 3 $- 7 \cdot$ 1
7	3	2	5	52	4
8	0	11	38	283	5
9	0	0	753	4 518	$11 \cdot$ 6 $+ 23 \cdot$ 5

Zeile 9: $753x_3 = 4\,518 \iff x_3 = 6.$

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $11x_2 + 228 = 283 \iff 11x_2 = 55 \iff x_2 = 5.$

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $3x_1 + 10 + 30 = 52 \iff 3x_1 = 12 \iff x_1 = 4.$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Zeile 2: $x_2 - 12x_3 = -30 \Leftrightarrow x_2 = 12x_3 - 30$
Zeile 1: $2x_1 - 8(12x_3 - 30) + 102x_3 = 280 \Leftrightarrow 2x_1 - 96x_3 + 240 + 102x_3 = 280 \Leftrightarrow 2x_1 + 6x_3 = 40 \Leftrightarrow 2x_1 = 40 - 6x_3 \Leftrightarrow x_1 = 20 - 3x_3$

1. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 20 - 3x_3 \\ 12x_3 - 30 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

2. $x_1 = 20 - 3x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 20 \geq 3x_3 \Leftrightarrow 6{,}\overline{6} \geq x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 6{,}\overline{6}$
   $x_2 = 12x_3 - 30 \geq 0 \Leftrightarrow 12x_3 \geq 30 \Leftrightarrow x_3 \geq 2{,}5$
   $x_3 \geq 0$
   $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 20 - 3x_3 \\ 12x_3 - 30 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in [2{,}5; 6{,}\overline{6}] \right\}$

3. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 20 - 3x_3 \\ 12x_3 - 30 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in \{3, 4, 5, 6\} \right\}$

   Eine ganzzahlige nicht negative Lösung ist z.B. für $x_3 = 5$: $\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 5 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix} \}$

Lösung zu Aufgabe 3:

1. $L(x,y,\lambda) = 25x + 40y + 700 + \lambda(x^2 + y^2 - 356)$

2. $$\begin{array}{rclrcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 25 + 2\lambda x & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 2\lambda \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 40 + 2\lambda y & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 2\lambda \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & x^2 + y^2 - 356 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}$$

3. Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 = 25 + 2\lambda x \\ \text{II} & 0 = 40 + 2\lambda y \\ \text{III} & 0 = x^2 + y^2 - 356 \\ \hline y \cdot \text{I} & 0 = 25y + 2\lambda xy \\ x \cdot \text{II} & 0 = 40x + 2\lambda xy \\ \hline y \cdot \text{II} - x \cdot \text{I} & 0 = 25y - 40x \Leftrightarrow y = \dfrac{8}{5}x \\ \text{III} & 0 = x^2 + \left(\dfrac{8}{5}x\right)^2 - 356 = \dfrac{25+64}{25}x^2 - 356 = \dfrac{89}{25}x^2 - 356 \\ & \Leftrightarrow x^2 = 356 \cdot \frac{25}{89} = 100 \Leftrightarrow \underbrace{x = -10}_{\notin \text{ Def.bereich}} \quad \text{oder } x = 10 \\ \hline & y = \dfrac{8}{5} \cdot 10 = 16 \\ \text{I} & 0 = 25 + 2\lambda \cdot 10 = 25 + 20\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{5}{4} \end{array}$$

d.h. $(10; 16; -\frac{5}{4})$ ist ein stationärer Punkt.
Hinreichende Bedingung:
$D(x,y,-\frac{5}{4}) = 2 \cdot (-\frac{5}{4}) \cdot 2 \cdot (-\frac{5}{4}) = 6{,}25 >_{\text{immer}} 0$
$L_{xx}(x;y;-\frac{5}{4}) = -2{,}5 <_{\text{immer}} 0$
d.h. $f(x,y)$ hat in $(10;16)$ eine globale Maximalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

Klausur QM II am 09.07.2019

Aufgabe 1

a) Welche der folgenden vier Aussagen ist richtig?
Hinweis: Es ist pro Frage nur eine Antwort korrekt.

1. Bei der Kapitalwertmethode wird wie folgt entschieden:
   - ☐ Eine Investition gilt rein rechnerisch als lohnend, wenn die abgezinsten Periodenüberschüsse kleiner sind als die Anschaffungskosten.
   - ☐ Eine Investition gilt rein rechnerisch als lohnend, wenn die abgezinsten Periodenüberschüsse genau so groß sind wie die Anschaffungskosten.
   - ☐ Eine Investition gilt rein rechnerisch als lohnend, wenn die abgezinsten Periodenüberschüsse größer sind als die Anschaffungskosten.
   - ☐ Es lässt sich für eine lohnende Investition keine allgemeine Aussage treffen anhand des Größenvergleichs der abgezinsten Periodenüberschüsse mit den Anschaffungskosten.
2. Bei der linearen Verzinsung
   - ☐ werden die jährlichen Zinsbeträge von Jahr zu Jahr kleiner.
   - ☐ werden die jährlichen Zinsbeträge von Jahr zu Jahr größer.
   - ☐ sind die jährlichen Zinsbeträge jedes Jahr gleich groß.
   - ☐ lässt sich keine allgemeine Aussage über die Vorjahreszinsen im Vergleich zu den Zinsen des aktuellen Jahrs machen.
3. Die Annuität einer Annuitätentilgung ist genauso groß wie
   - ☐ die nachschüssige Jahresrente.
   - ☐ die vorschüssige Jahresrente.
   - ☐ die Annuität der Ratentilgung.
   - ☐ wie der erste Tilgungsbetrag der Annuitätentilgung.

b) Am 01.01.2019 wurde zu einem Jahreszins von 1,2 % eine Schuld in Höhe von 20 000 Euro aufgenommen, die durch Monatsraten in Höhe von 500 Euro zurückgezahlt wird. Die erste Monatsrate ist sofort bei Kreditaufnahme fällig.

1. Wie viele volle Jahre lang sind volle Monatsraten zu zahlen?
2. Wie hoch ist die Restschuld am Ende des dritten Jahres?

Lösung:

a) Richtig sind die folgenden Aussagen:

1. Bei der Kapitalwertmethode wird wie folgt entschieden: Eine Investition gilt rein rechnerisch als lohnend, wenn die abgezinsten Periodenüberschüsse größer sind als die Anschaffungskosten.

2. Bei der linearen Verzinsung sind die jährlichen Zinsbeträge jedes Jahr gleich groß.
3. Die Annuität einer Annuitätentilgung ist genauso groß wie die nachschüssige Jahresrente.

b) nachschüssige Jahresersatzrente r_j:
$r_j = 500\,(12 + 6{,}5 \cdot 0{,}012) = 6\,039$

1. $n = -\dfrac{\ln\left[1 - \frac{20\,000}{6\,039} \cdot 0{,}012\right]}{\ln 1{,}012} = 3{,}399648$

   d.h. drei Jahre lang sind volle Monatsraten zu zahlen.

2. $K_3 = 20\,000 \cdot 1{,}012^3 - 6\,039 \cdot \dfrac{1{,}012^3 - 1}{0{,}012} = 2\,393{,}40$

   d.h. die Restschuld beträgt 2 393,40 Euro.