QM I am 03.07.2018

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3x}{2x^2 + 2x - 4}$$

b) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von:

$$f(x) = 3x \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right) \quad ; x \in \mathbb{R}^+$$

c) Untersuchen Sie die Funktion:

$$f(x, y) = -x^2 + y^2 + 6x - 8y + 666 \;\; ; x, y \in \mathbb{R}$$

auf Sattelstellen.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit dem Gaußalgorithmus:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 19 \\ \text{II} & 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 24 \\ \text{III} & 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 50 \end{array}$$

b) Jede der drei Kostenstellen K_1, K_2, K_3 eines Unternehmens erbringt Leistungen (in Leistungseinheiten) für die jeweils anderen Kostenstellen und für Kunden außerhalb des Unternehmens gemäß folgender Tabelle:

	an K_1	an K_2	an K_3	an Kunden
von K_1	0	10	20	60
von K_2	30	0	40	80
von K_3	20	15	0	50

Primärkosten fallen bei K_1 in Höhe von 290 GE, bei K_2 in Höhe von 160 GE und bei K_3 in Höhe von 80 GE an.
Stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise auf. (*Hinweis: Die Berechnung der innerbetrieblichen Verrechnungspreise ist hier NICHT erforderlich!*)

Aufgabe 3:
Gegeben ist die Kostenfunktion

$$K(x, y) = \frac{7}{2}x^2 - 3xy - 34x + 3y^2 - 42y + 1\,000 \;\; ; x, y \in [0; 50]$$

in Abhängigkeit der beiden Produktionsmengen x und y von Gut I bzw. Gut II. Bestimmen Sie mithilfe der Lagrange-Methode die minimalen Kosten unter der Nebenbedingung $2x + y = 32$.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Durch Einsetzen von $x = 1$ ergibt sich: Nenner=0=Zähler

1. Lösungsweg: (Regel von de l'Hôpital)

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3x}{2x^2 + 2x - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{6x - 3}{4x + 2} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

2. Lösungsweg: (Faktorisieren und Kürzen)

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3x}{2x^2 + 2x - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{3x(x-1)}{2(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x}{2(x+2)} = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

b) *1. Lösungsweg:*

Mit dem zweiten Logarithmus-Gesetz $\ln \frac{u}{v} = \ln(u) - \ln(v)$ gilt:

$f(x) = 3x \cdot [\ln(2) - \ln(x)] = \ln(2) \cdot 3x - 3x \cdot \ln(x)$

Produktregel:

$$f'(x) = 3 \cdot \ln(2) - \left[3 \cdot \ln(x) + 3x \cdot \frac{1}{x}\right] = 3 \cdot \ln(2) - 3 \cdot \ln(x) - 3$$

$$f''(x) = -\frac{3}{x}$$

2. Lösungsweg:

Ableitung von $\ln\left(\frac{2}{x}\right)$ mit der Kettenregel:

$$i(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow i'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$a(y) = \ln y \Rightarrow a'(y) = \frac{1}{y}$$

$$\left(\ln\left(\frac{2}{x}\right)\right)' = \frac{1}{2/x} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

Produktregel:

$$f'(x) = 3 \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right) + 3x \cdot \frac{-1}{x} = 3 \cdot \ln\left(\frac{2}{x}\right) - 3$$

$$f''(x) = -\frac{3}{x}$$

c)
$$\begin{array}{ll} f_x(x,y) = -2x + 6 & f_{xx}(x,y) = -2 \\ f_y(x,y) = 2y - 8 & f_{yy}(x,y) = 2 \\ & f_{xy}(x,y) = 0 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{lllll} \text{I} & 0 & = & -2x + 6 & \Leftrightarrow x = 3 \\ \text{II} & 0 & = & 2y - 8 & \Leftrightarrow y = 4 \end{array}$$

d.h. $(3; 4)$ ist ein stationärer Punkt.

Hinreichende Bedingung:

$D(3; 4) = -2 \cdot 2 - 0 = -4 < 0$

d.h. $(3; 4)$ ist eine Sattelstelle

Lösung zu Aufgabe 2:

a) Gaußalgorithmus:

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	$\boxed{5}$	4	1	19	
2	3	-2	4	24	
3	8	4	6	50	
4	5	4	1	19	1
5	0	$\boxed{-22}$	17	63	$5 \cdot$ 2 $-3 \cdot$ 1
6	0	-12	22	98	$5 \cdot$ 3 $-8 \cdot$ 1
7	5	4	1	19	4
8	0	-22	17	63	5
9	0	0	280	1 400	$22 \cdot$ 6 $-12 \cdot$ 5

Zeile 9: $280x_3 = 1\,400 \iff x_3 = 5.$

Einsetzen in Zeile 8 ergibt: $-22x_2 + 85 = 63 \iff -22x_2 = -22 \iff x_2 = 1.$

Einsetzen in Zeile 7 ergibt: $5x_1 + 4 + 5 = 19 \iff 5x_1 = 10 \iff x_1 = 2.$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ergibt sich somit wie folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

b) v_1= Bewertung in GE für eine in K_1 hergestellte LE
v_2= Bewertung in GE für eine in K_2 hergestellte LE
v_3= Bewertung in GE für eine in K_3 hergestellte LE
Kostengleichgewicht:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & (10+20+60)v_1 - 30v_2 - 20v_3 & = & 290 \\ \text{II} & (30+40+80)v_2 - 10v_1 - 15v_3 & = & 160 \\ \text{III} & (20+15+50)v_3 - 20v_1 - 40v_2 & = & 80 \end{array}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

$$L(x, y, \lambda) = \frac{7}{2}x^2 - 3xy - 34x + 3y^2 - 42y + 1\,000 + \lambda(2x + y - 32)$$

$$\begin{array}{lcl lcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 7x - 3y - 34 + 2\lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) & = & 7 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & -3x + 6y - 42 + \lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) & = & 6 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 2x + y - 32 & L_{xy}(x,y,\lambda) & = & -3 \end{array}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 = 7x - 3y - 34 + 2\lambda \\ \text{II} & 0 = -3x + 6y - 42 + \lambda \\ \text{III} & 0 = 2x + y - 32 \\ \hline \text{I} - 2 \cdot \text{II} & 0 = 13x - 15y + 50 \\ \text{III} \cdot 15 & 0 = 30x + 15y - 480 \\ \hline & 0 = 43x - 430 \Leftrightarrow x = 10 \\ \text{III} & 0 = 20 + y - 32 \Leftrightarrow y = 12 \end{array}$$

Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt. ($\lambda_0 = 0$)
d.h. $(10; 12; \lambda_0)$ ist ein stationärer Punkt.

Hinreichende Bedingung:
$D(x, y, \lambda_0) = 7 \cdot 6 - (-3)^2 = 42 - 9 = 33 >_{\text{immer}} 0$
$L_{xx}(x; y; \lambda_0) = 7 >_{\text{immer}} 0$
d.h. $K(x, y)$ hat in $(10; 12)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.
$K(10; 12) = 578$
d. h. die minimalen Kosten unter Berücksichtigung der Nebenbedingung betragen 578 GE.