Klausur QM I am 03.02.2020

Aufgabe 1

a) Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = x^3 + 6 \cdot x^2 - 15 \cdot x + 1 \ ; x \in \mathbb{R}.$$

1. Bestimmen Sie die Tangentengleichung der Funktion an der Stelle $x_0 = 2$.
2. Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen und die Wendestellen der Funtkion.

b) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Berechnen Sie: $A - 4 \cdot B$
2. Berechnen Sie: $(A - 3 \cdot B) \cdot C - B \cdot C$
   Tipp: Distributivgesetz

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-algorithmus:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 12 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 = 24 \\ \text{II} & x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 19 \\ \text{III} & -5 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 9 \end{array}$$

b) Das Endtableau bzw. die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems nach Durchführung eines Gaußalgorithmus sieht wie folgt aus:

Zeile	x_1	x_2	x_3	
1	8	2	−10	34
2	0	1	−6	−15
3	0	0	0	0

bzw. $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & -10 & 34 \\ 0 & 1 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des zugrundeliegenden Gleichungssystems.
2. Bestimmen Sie alle nich negativen Lösungen.
3. Bestimmen Sie alle nicht negativen ganzzahligen Lösungen.

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode die globale Minimalstelle der Funktion:

$$f(x, y) = 8 \cdot x^2 + 10 \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y + 713; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

unter der Nebenbedingung:

$$x + 2 \cdot y = 75.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
2. Berechnen Sie alle für die Lagrange-Methode erforderlichen partiellen Ableitungen.
3. Bestimmen Sie die globale Minimalstelle mit Hilfe der Lagrange-Methode.

b) Für welche $a > 0$ ist die hinreichende Bedingung $D(x, y, \lambda_0) > 0$ für die abgewandelte Funktion:

$$f(x, y) = a \cdot x^2 + 10 \cdot y^2 - 4 \cdot x \cdot y + 713; \;\; x, y \in R$$

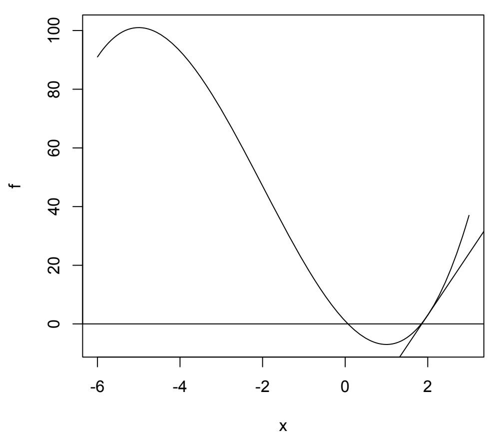
unter der gleichen Nebenbedingung:

$$x + 2 \cdot y = 75$$

immer (d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$) erfüllt?

Lösung zu Aufgabe 1

a) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$
$f''(x) = 6x + 12$
$f'''(x) = 6$



1. $f(2) = 3$ und $f'(2) = 21$
   Tangente $t(x) = a + b \cdot x$
   I $b = f'(2) \Leftrightarrow b = 21$
   II $t(2) = f(2) \Leftrightarrow 3 = a + 21 \cdot 2 \Leftrightarrow a = -39$
   d.h. $t(x) = -39 + 21 \cdot x$
2. Notwendige Bedingung für Extremstellen:
   $0 = 3x^2 + 12x - 15 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 4x - 5 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3$
   d.h. $x = -5$ oder $x = 1$
   Hinreichende Bedingung für Extremstellen:

$f''(-5) = -18 < 0 \Rightarrow x = -5$ lokale Maximalstelle
$f''(1) = 18 > 0 \Rightarrow x = 1$ lokale Minimalstelle
Notwendige Bedingung für Wendestellen:
$0 = f''(x) = 6x + 12 \Leftrightarrow x = -2$
Hinreichende Bedingung für Wendestellen:
$f'''(-2) = 6 \neq 0 \Rightarrow x = -2$ Wendestelle

b) 1. $A - 4B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix

2. $(A - 3B)C - BC = (A - 3B - B)C = (A - 4B)C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C = C$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Gaußalgorithmus

Zeile	x_1	x_2	x_3		Operation
1	12	5	−1	24	
2	$\boxed{1}$	2	3	19	
3	−5	−1	4	9	
4	1	2	3	19	2
5	0	−19	−37	−204	1 $-12 \cdot$ 2
6	0	$\boxed{9}$	19	104	3 $+5 \cdot$ 2
7	1	2	3	19	4
8	0	9	19	104	6
9	0	0	28	140	$9 \cdot$ 5 $+19 \cdot$ 6

9 $28x_3 = 140 \Leftrightarrow x_3 = 5$

8 $9x_2 + 19 \cdot 5 = 104 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{104 - 19 \cdot 5}{9} = 1$

7 $x_1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 19 \Leftrightarrow x_1 = 19 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = 2$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Zeile 2: $x_2 - 6x_3 = -15 \Leftrightarrow x_2 = 6x_3 - 15$
Zeile 1: $8x_1 + 2(6x_3 - 15) - 10x_3 = 34 \Leftrightarrow 8x_1 + 12x_3 - 30 - 10x_3 = 34 \Leftrightarrow 8x_1 + 2x_3 = 64 \Leftrightarrow 8x_1 = 64 - 2x_3 \Leftrightarrow x_1 = 8 - 0{,}25x_3$

1. $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 - 0{,}25x_3 \\ 6x_3 - 15 \\ x_3 \end{pmatrix} ; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

2. $x_1 = 8 - 0{,}25x_3 \geq 0 \Leftrightarrow 8 \geq 0{,}25x_3 \Leftrightarrow 32 \geq x_3 \Leftrightarrow x_3 \leq 32$
   $x_2 = 6x_3 - 15 \geq 0 \Leftrightarrow 6x_3 \geq 15 \Leftrightarrow x_3 \geq 2{,}5$
   $x_3 \geq 0$
   $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 - 0{,}25x_3 \\ 6x_3 - 15 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in [2{,}5; 32] \right\}$$
3. Damit $x_1 = 8 - \frac{1}{4}x_3$ ganzzahlig ist, muss x_3 ein Vielfaches der Zahl 4 sein.
   $$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 - 0{,}25x_3 \\ 6x_3 - 15 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_3 \in \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\} \right\}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) $x + 2y = 75 \Leftrightarrow x + 2y - 75 = 0$

1. $L(x, y, \lambda) = 8x^2 + 10y^2 - 4xy + 713 + \lambda(x + 2y - 75)$
2. $$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 16x - 4y + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 16 \\ L_y(x,y,\lambda) &= 20y - 4x + 2\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 20 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + 2y - 75 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -4 \end{aligned}$$
3. Notwendige Bedingung:
   $$\begin{array}{ll} \text{I} & 0 = 16x - 4y + \lambda \Leftrightarrow 0 = 32x - 8y + 2\lambda \\ \text{II} & 0 = -4x + 20y + 2\lambda \\ \text{III} & 0 = x + 2y - 75 \Leftrightarrow x = 75 - 2y \\ \hline 2 \cdot \text{I} - \text{II} & 0 = 36x - 28y = 36(75 - 2y) - 28y = 2\,700 - 72y - 28y = 2\,700 - 100y \\ & \Leftrightarrow y = 27 \Rightarrow x = 75 - 2 \cdot 27 = 21 \\ \hline \end{array}$$
   Der Wert von λ_0 wird nicht benötigt.
   d.h. $(21; 27; \lambda_0)$ ist ein stationärer Punkt.
   Hinreichende Bedingung:
   $D(x, y, \lambda_0) = 16 \cdot 20 - (-4)^2 = 304 >_{\text{immer}} 0$
   $L_{xx}(x; y; \lambda_0) = 16 >_{\text{immer}} 0$
   d.h. $f(x, y)$ hat in $(21; 27)$ eine globale Minimalstelle unter Berücksichtigung der Nebenbedingung.

b) Lagrangefunktion:
   $L(x, y, \lambda) = ax^2 + 10y^2 - 4xy + 713 + \lambda(x + 2y - 75)$
   $$\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= 2ax - 4y + \lambda & L_{xx}(x,y,\lambda) &= 2a \\ L_y(x,y,\lambda) &= 20y - 4x + 2\lambda & L_{yy}(x,y,\lambda) &= 20 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= x + 2y - 75 & L_{xy}(x,y,\lambda) &= -4 \end{aligned}$$
   $D(x, y, \lambda_0) = 2a \cdot 20 - (-4)^2 = 40a - 16 \overset{!}{>} 0 \Leftrightarrow 40a > 16 \Leftrightarrow a > 0{,}4$
   d.h. $D(x, y, \lambda_0)$ ist genau dann größer als null, wenn gilt: $a \in (0{,}4; \infty)$.