

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Vorschüssige Verzinsung

Aufgabe 3.1

Ein Kapital von 10 000 € wird fünfzehn Jahre lang bei vorschüssiger Verzinsung angelegt. Für das erste Jahr werden 2 %, für das zweite, dritte und vierte Jahr 3 % und ab dem fünften Jahr 4 % vorschüssige Zinsen berechnet.

- a) Welcher Endwert ergibt sich am Ende des fünfzehnten Jahres?
- b) Zu welchem gleich bleibenden vorschüssigen Jahreszins wäre der gleiche Endwert wie unter a) erreicht worden?

Aufgabe 3.2

Ein Kapital von 8 000 € wird fünfzehn Jahre lang zu 3,1 % pro Jahr vorschüssig mit Zinseszinsen verzinst.

- a) Welcher Endwert ergibt sich am Ende des fünfzehnten Jahres?
- b) Welcher Jahreszins wäre nötig, um bei fünfzehnjähriger nachschüssiger Verzinsung denselben Endwert wie unter a) zu erhalten?

Aufgabe 3.3

Ein Kapital von 20 000 € ist bei vorschüssiger Verzinsung zu 2,1% pro anno auf 28 087,10 € angewachsen. Wie hoch ist die Laufzeit gewesen?

Aufgabe 3.4

Ein Unternehmen bekommt von seiner Hausbank das folgende Angebot für eine Geldanlage:

Anlagevolumen: 100 000 €

Verzinsung: jährlich vorschüssige Verzinsung mit Zinseszins

Die Auszahlung des Anlagebetrages inklusive Zinsen erfolgt nach zwanzig Jahren.

Zinskonditionen: 1. und 2. Jahr: 2% p.a.
3. bis 7. Jahr: 3% p.a.
8. bis 20. Jahr: 4% p.a.

- a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen am Ende des zwanzigsten Jahres von seiner Hausbank ausgezahlt bekommt?
- b) Am Ende welchen Jahres übersteigt bei diesem Angebot das Guthaben des Unternehmens erstmalig den Betrag von 150 000 Euro?
- c) Wie hoch ist der Effektivzins, d.h. welcher gleichbleibende Zinssatz führt nach zwanzig Jahren bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung zum gleichen Betrag wie in a) ?

Lösung zu Aufgabe 3.1

a) $K_{15} = \frac{K_0}{(1 - 0,02) \cdot (1 - 0,03)^3 \cdot (1 - 0,04)^{11}} = 17\,517,62$
d.h. der Endwert beträgt 17 517,62 €

b) $17\,517,62 = \frac{10\,000}{(1 - i)^{15}}$
 $(1 - i)^{15} = \frac{10\,000}{17\,517,62}$
 $(1 - i)^{15} = 0,5708538$
 $1 - i = \sqrt[15]{0,5708538}$
 $1 - i = 0,963315$
 $i = 0,03668499$

d.h. der gleich bleibende vorschüssige Jahreszins beträgt 3,668499...%

Lösung zu Aufgabe 3.2

Ersatzzins: $i' = \frac{0,031}{0,969} = 0,03199174$

a) 1. Lösungsweg:

$$K_{15} = \frac{8\,000}{0,969^{15}} = 12\,830,20$$

2. Lösungsweg:

$$K_{15} = 8\,000 \cdot 1,03199174^{15} = 12\,830,20$$

d.h. der Endwert beträgt 12 830,20 €

b) Der Ersatzzins beträgt 3,199174%

Lösung zu Aufgabe 3.3

1. Lösungsweg:

$$\text{Ersatzzinssatz } i' = \frac{0,021}{1 - 0,021} = 0,02145046$$

$$\text{Laufzeit } n = \frac{\ln 28\,087,10 - \ln 20\,000}{\ln 1,02145046} = 16$$

d.h. die Laufzeit betrug sechzehn Jahre.

2. Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 28\,087,10 &= \frac{20\,000}{0,979^n} && | \cdot 0,979^n \\ 28\,087,10 \cdot 0,979^n &= 20\,000 && | \div 28\,087,10 \\ 0,979^n &= 0,7120681 && | \text{ Definition des Logarithmus} \\ n &= \log_{0,979} 0,7120681 && | \text{ Umrechnungsformel} \\ n &= \frac{\ln 0,7120681}{\ln 0,979} = 16 \end{aligned}$$

d.h. nach sechzehn Jahren.

Lösung zu Aufgabe 3.4:

$$\text{a) } K_2 = \frac{100\,000}{0,98^2} = 104\,123,28$$

$$K_7 = \frac{104\,123,28}{0,97^5} = 121\,252,07$$

$$K_{20} = \frac{121\,252,07}{0,96^{13}} = 206\,140,42$$

d.h. der Betrag liegt bei 206 140,42 Euro.

2. Lösungsweg:

$$K_{20} = \frac{100\,000}{0,98^2 \cdot 0,97^5 \cdot 0,96^{13}} = 206\,140,42$$

b) *1. Lösungsweg:*

$$\text{nachschüssiger Ersatzzins } i' = \frac{i}{1-i} = \frac{0,04}{0,96} = 0,041\bar{6}$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{150\,000}{121\,252,07}\right)}{\ln 1,041\bar{6}} = 5,211987 \Rightarrow 7 + 5,2 = 12,2$$

d.h. nach dreizehn Jahren.

2. Lösungsweg:

$$\begin{aligned} 150\,000 &= \frac{121\,252,07}{0,96^n} && | \cdot 0,96^n \\ 150\,000 \cdot 0,96^n &= 121\,252,07 && | \div 150\,000 \\ 0,96^n &= 0,8083471 && | \text{ Definition des Logarithmus} \\ n &= \log_{0,96} 0,8083471 && | \text{ Umrechnungsformel} \\ n &= \frac{\ln 0,8083471}{\ln 0,96} = 5,211987 \Rightarrow 7 + 5,2 = 12,2 \end{aligned}$$

d.h. nach dreizehn Jahren.

$$\text{c) } q = \sqrt[20]{\frac{206\,140,42}{100\,000}} = 1,036831$$

d.h. der gesuchte Zins beträgt etwa 3,6831%.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
jutta.arrenberg@th-koeln.de

Übungen zur Vorlesung Finanzmathematik

Vorschüssige Verzinsung
Arbeitsblatt

Beispiel (Klausur vom 02.02.2010)

Ein Unternehmen bekommt von seiner Hausbank das folgende Angebot für eine Geldanlage:

Anlagevolumen: 100 000 €

Verzinsung: jährlich vorschüssige Verzinsung mit Zinseszins

Die Auszahlung des Anlagebetrages inklusive Zinsen erfolgt nach zehn Jahren.

Zinskonditionen: 1. Jahr: 5% p.a.
2. bis 5. Jahr: 6% p.a.
6. bis 10. Jahr: 7% p.a.

- a) Wie hoch ist der Betrag, den das Unternehmen am Ende des zehnten Jahres von seiner Hausbank ausgezahlt bekommt?
- b) Am Ende welchen Jahres übersteigt bei diesem Angebot das Guthaben des Unternehmens erstmalig den Betrag von 165 000 Euro?
- c) Wie hoch ist der Effektivzins, d.h. welcher gleichbleibende Zinssatz führt nach zehn Jahren bei jährlicher nachschüssiger Verzinsung zum gleichen Betrag wie in a) ?