

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 3914
Email: jutta.arrenberg@th-koeln.de
website: <http://th-koeln.arrenberg.com/>

Brückenkurs zum Potenzieren

Das mehrfache Multiplizieren einer Zahl a mit sich selbst wird als **Potenzieren** bezeichnet. Zur besseren Lesbarkeit der Rechenart Potenzieren wird eine Kurzschreibweise vereinbart:

Definition

Wird eine Zahl a genau n -mal mit sich selbst multipliziert, so schreiben wir statt $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$ auch kurz: a^n .

Beim Rechnen ist die folgende Reihenfolge der Rechenarten zu beachten:

1. Potenzieren
2. Multiplizieren/Dividieren
3. Addieren/Subtrahieren

Für das Potenzieren gibt es **fünf Rechenregeln**, die das Rechnen mit Potenzen erheblich beschleunigen. (Also eine Zeitersparnis in der Klausur bringen.)

Regel 1:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Regel 2:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Aus der Rechenregel 2 ergibt sich unmittelbar, dass für $a \neq 0$ gilt: $a^0 = 1$

Definition

Mit der Vereinbarung

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

können wir das Potenzieren auf negative Exponenten erweitern.

Regel 3:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Regel 4:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Regel 5:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$$

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
Email: jutta.arrenberg@th-koeln.de
website: <http://th-koeln.arrenberg.com/>

Brückenkurs Übungsaufgaben zum Potenzieren

Aufgabe P.1

Berechnen Sie:

a) $1,3 \cdot 10^{-3} = ?$

b) $-1,5 \cdot 10^{-7} = ?$

c) $5,1 \cdot 10^3 = ?$

Aufgabe P.2

Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr?

a) $(x + y)^2 \stackrel{?}{=} x^2 + y^2$

b) $x^2 \cdot y^2 \stackrel{?}{=} (x \cdot y)^2$

c) $3x^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{3x^2}$

d) $3x^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{x^2}$

Aufgabe P.3

Berechnen Sie erst im Kopf und anschließend mit dem Taschenrechner:

a) $4\,000\,000 \cdot 2\,500 = ?$

b) $0,016 \cdot 0,04 = ?$

c) $0,002 \cdot 600\,000 = ?$

d) $2^{(4^2)} = ?$

e) $(2^4)^2 = ?$

f) $(5 \cdot 2^3)^2 = ?$

Aufgabe P.4

Eine Bank gewährt 4,2% Zinseszinsen pro Jahr.

- a) Auf ein Konto bei dieser Bank werden 2 000 Euro eingezahlt. Wie hoch ist das Guthaben nach sieben Jahren?
- b) In zehn Jahren soll ein Betrag von 10 000 Euro zur Verfügung stehen. Wie viel Euro sind dann heute bei dieser Bank einzuzahlen?

Lösung zu Aufgabe P.1

a) $0,0013 = \frac{1,3}{1\,000} = \frac{13}{10\,000}$

b) $-0,000\,000\,15 = \frac{-1,5}{10\,000\,000} = \frac{-15}{100\,000\,000}$

c) 5 100

Lösung zu Aufgabe P.2

a) wahr z.B. für $x = 0$ und $y = 1$

nicht wahr z.B. für $x = 3$ und $y = 4$; denn:

$$x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ aber } (x + y)^2 = (3 + 4)^2 = 7^2 = 49$$

b) immer wahr, das ist genau Regel 3

c) nicht wahr z.B. für $x = 9$

$$3x^{-2} = 3 \cdot 9^{-2} = 3 \cdot \frac{1}{9^2} = \frac{3}{81} = \frac{1}{27}, \text{ aber } \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3 \cdot 9^2} = \frac{1}{3 \cdot 81} = \frac{1}{243}$$

d) Der Ausdruck ist nicht erklärt für $x = 0$, sonst immer wahr

Lösung zu Aufgabe P.3

a) $1 \cdot 10^{10} = 10\,000\,000\,000 = 10$ Milliarden

b) $0,000\,64 = 6,4 \cdot 10^{-4}$

c) 1 200

d) 65 536

e) 256

f) 1 600

Lösung zu Aufgabe P.4

a) $2\,000 \cdot 1,042^7 = 2\,667,498$

d.h. das Guthaben beträgt 2 667,50 Euro.

b) $\frac{10\,000}{1,042^{10}} = 6\,627,089$

d.h. es sind heute 6 627,09 Euro einzuzahlen.

Technische Hochschule Köln
Fakultät für Wirtschafts- und Rechtswissenschaften
Prof. Dr. Arrenberg
Raum 221, Tel. 39 14
Email: jutta.arrenberg@th-koeln.de
website: <http://th-koeln.arrenberg.com/>

Brückenkurs **Übung zum Potenzieren**

Aufgabe (Quelle: Forschung & Lehre)

Die Oiltron AG verdient ihr Geld mit der Förderung von Erdöl. Je mehr Erdöl die Oiltron AG täglich fördert, desto schwieriger und teurer wird die Förderung.

Für die Förderung eines Barrels bei einer täglichen Gesamtfördermenge von x Barrel betragen die Kosten (in Euro pro Barrel) $49,80143 + 1,7^{0,000001 \cdot x}$.

Die Oiltron AG macht mit dem Verkauf des geförderten Erdöls täglich einen Gewinn von 5 Mio. Euro, wobei sie pro verkauftem Barrel Einnahmen in Höhe von 65 Euro erzielt und täglich die komplette Fördermenge verkauft.

(*Hinweis:* Gewinn = Umsatz – Kosten)

Werden vier oder fünf Mio. Barrel pro Tag gefördert und welche der vier Aussagen trifft zu?

- a) Die Oiltron AG fördert 4 Mio. Barrel am Tag. Mit einer Erhöhung der Fördermenge um eine Mio. Barrel am Tag ließe sich der Gewinn deutlich steigern?
- b) Die Oiltron AG fördert 4 Mio. Barrel am Tag. Mit einer Senkung der Fördermenge um eine Mio. Barrel am Tag ließe sich der Gewinn deutlich steigern?
- c) Die Oiltron AG fördert 5 Mio. Barrel am Tag. Mit einer Erhöhung der Fördermenge um eine Mio. Barrel am Tag ließe sich der Gewinn deutlich steigern?
- d) Die Oiltron AG fördert 5 Mio. Barrel am Tag. Mit einer Senkung der Fördermenge um eine Mio. Barrel am Tag ließe sich der Gewinn deutlich steigern?

Lösung:

Gegeben ist, dass die Oiltron AG täglich 5 Mio. Euro Gewinn macht. Nun kann durch Ausprobieren ermittelt werden, mit welcher Förderung am Tag genau dieser Gewinn erzielt wird. Vorgeschlagen sind die täglichen Fördermengen 4 Mio. Barrel und 5 Mio. Barrel.

Zu beachten ist bei der Berechnung der (Gesamt-)Kosten, dass hier die Stückkosten für die Förderung eines einzelnen Barrels bei einer Gesamtfördermenge von x Barrel am Tag angegeben sind. Also müssen die Stückkosten mit der täglichen Fördermenge multipliziert werden, um die Gesamtkosten zu erhalten.

Falls 4 Mio. Barrel am Tag gefördert werden, so beträgt der Umsatz
 $4\,000\,000 \cdot 65 = 260\,000\,000 = 260$ Mio. Euro.

Und die Gesamtkosten betragen

$$4\,000\,000 \cdot (49,80143 + 1,7^4) = 232\,614\,120 = 232,614120 \text{ Mio. Euro.}$$

Somit beträgt der Gewinn $260 - 232,614120 = 27,38588 \neq 5$ Mio. Euro. Also treffen die Aussagen a) und b) nicht zu, da der Gewinn ja 5 Mio. Euro betragen soll.

Nun machen wir die Rechnung für den Fall, dass 5 Mio. Barrel am Tag gefördert werden. Der Umsatz beträgt

$$5\,000\,000 \cdot 65 = 325\,000\,000 = 325 \text{ Mio. Euro.}$$

Und die Gesamtkosten betragen

$$5\,000\,000 \cdot (49,80143 + 1,7^5) = 320\,000\,000 = 320 \text{ Mio. Euro.}$$

Somit beträgt der Gewinn $325 - 320 = 5$ Mio. Euro. Wird die tägliche Fördermenge von 5 auf 4 Mio. Barrel gesenkt, so steigt der Gewinn von 5 auf 27,38588 Mio. Euro.

Also ist die Aussage d) richtig. Die Aussage c) kann nicht richtig sein, weil der Gewinn bei einer täglichen Fördermenge von 6 Mio. Barrel nicht mehr 5 Mio. Euro beträgt, er ist sogar negativ mit $-53,63399$ Mio. Euro; d.h. es wird ein Verlust gemacht, falls die tägliche Fördermenge 6 Mio. Barrel betragen würde.